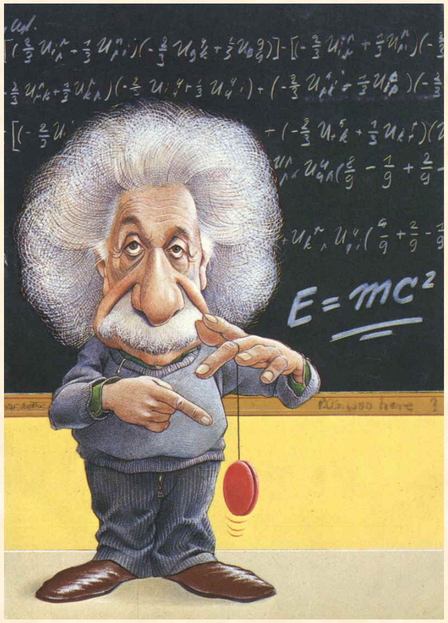
Universidade Federal do Espírito Santo

Centro de Ciências Exatas

Departamento de Física

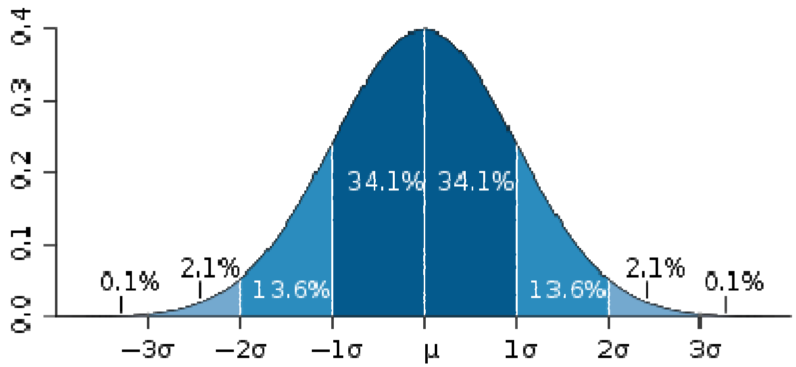
Introdução ao Estudo dos Fenômenos Físicos



Aula 06

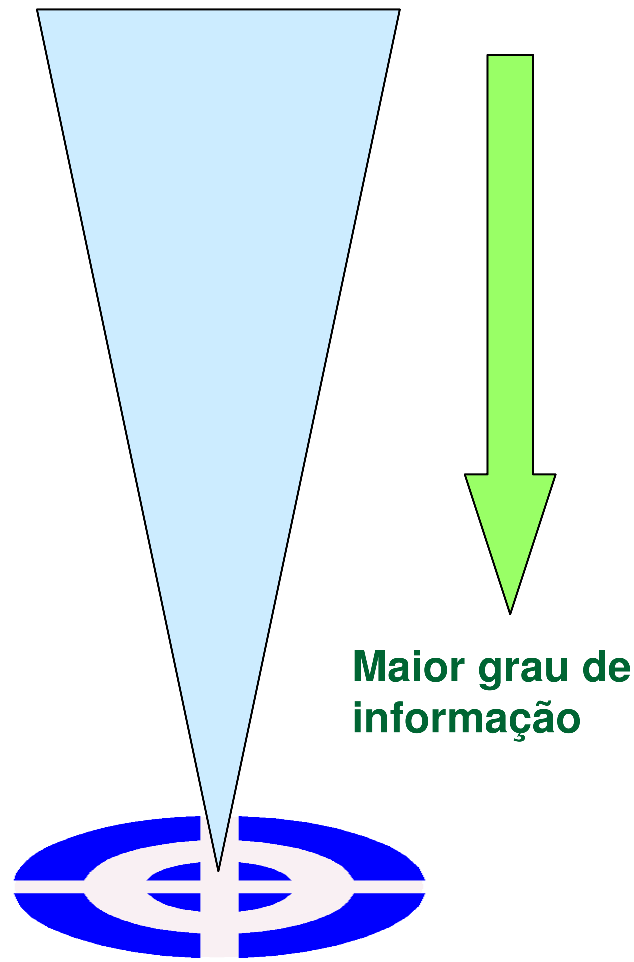
Medidas físicas

- **Erros experimentais.**
- **Incertezas.**
- **Análise estatística.**
- **Exemplos práticos.**

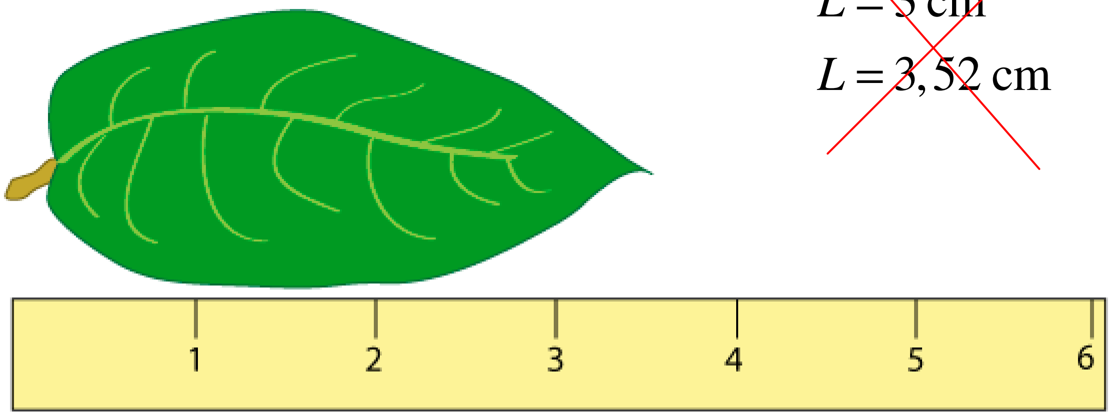


Como expressar o resultado de uma medida?

- ✓ **Avaliações de ordens de grandeza.**
- ✓ **Medidas expressas apenas com algarismos significativos.**
- ✓ **Medidas expressas com informações sobre incertezas.**
- ✓ **Uso de métodos estatísticos.**



Algarismos significativos

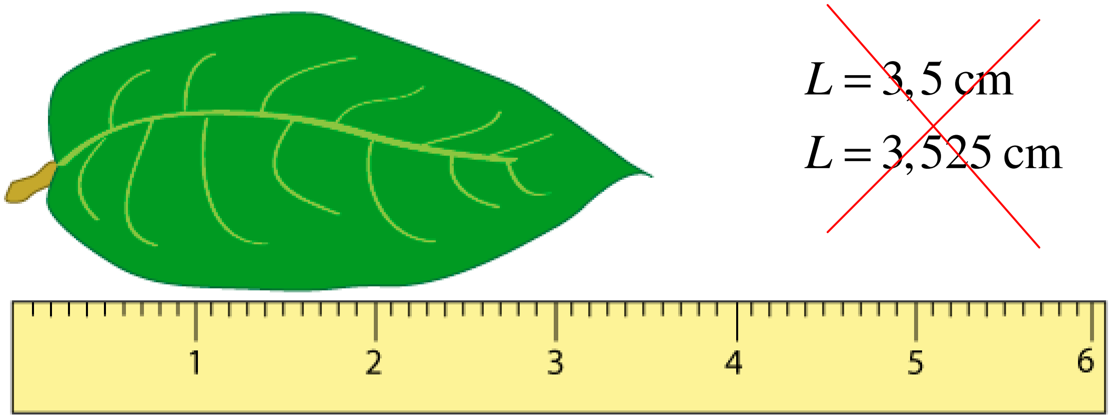


$\cancel{L = 3\ \text{cm}}$

$\cancel{L = 3{,}52\ \text{cm}}$

Correto Duvidoso

$$L = \color{blue}{3},\color{red}{5}\ \text{cm}$$



$\cancel{L = 3{,}5\ \text{cm}}$

$\cancel{L = 3{,}525\ \text{cm}}$

Corretos Duvidoso

$$L = \color{blue}{3},\color{blue}{5}\color{red}{2}\ \text{cm}$$

Erros experimentais

6.2 Erros estatísticos e sistemáticos

Geralmente, ocorrem erros de vários tipos numa mesma medição. Os diferentes tipos de erros podem ser agrupados em 2 grandes grupos que são os *erros sistemáticos* e os *erros estatísticos*[1]. Os erros estatísticos também são chamados *erros aleatórios*.

Considerando n resultados y_i para um mensurando, os erros estatísticos e erros sistemáticos podem ser distinguidos como segue.

- *Erro sistemático* é sempre o mesmo nos n resultados. Isto é, quando existe somente erro sistemático, os n resultados y_i são iguais e a diferença para o valor verdadeiro y_v é sempre a mesma.

- *Erro estatístico* ou *erro aleatório* é um erro tal que os n resultados y_i se distribuem de maneira aleatória em torno do valor verdadeiro y_v, (na ausência de erro sistemático). Conforme o número de repetições da medição aumenta indefinidamente $(n \to \infty)$, o valor médio $\overline{y}$ se aproxima do valor verdadeiro da grandeza[2] (y_v).

J. H. Vuolo, *Fundamentos da teoria dos erros*, 1993

Erros experimentais

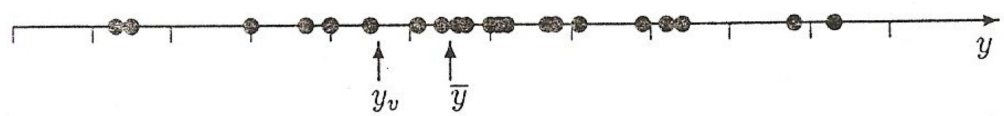


Figura 6.1. *Representação de n resultados y_i. O valor médio é $\overline{y}$ e y_v representa o valor verdadeiro.*

Valor médio: $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j$

Desvio médio absoluto: $\overline{d} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left| y_j - \overline{y} \right|$

Desvio padrão da distribuição de medidas: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \overline{y}\right)^2}{n-1}}$

J. H. Vuolo, *Fundamentos da teoria dos erros*, 1993

Erros experimentais

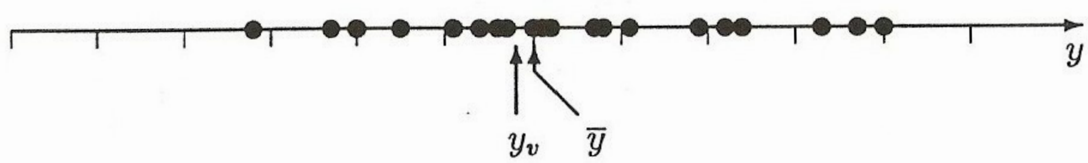


Figura 6.2. *Resultados de medições, quando existe somente erro estatístico. O valor médio* $\overline{y}$ *se aproxima do valor verdadeiro* y_v*, conforme o número de medições aumenta.*

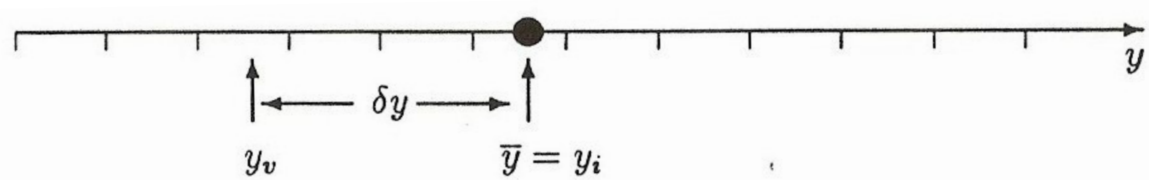


Figura 6.3. *Resultados de medições quando existe somente erro sistemático. O resultado é sempre o mesmo (* $y_i = \overline{y}$ *), mas não é o valor verdadeiro* y_v*. A precisão é boa, mas a acurácia é ruim.*

J. H. Vuolo, *Fundamentos da teoria dos erros*, 1993

Erros experimentais

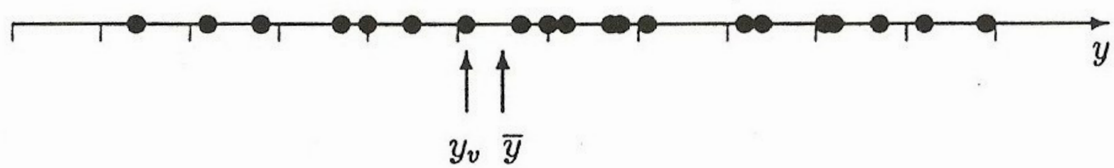


Figura 6.4. *Resultados de medições com precisão ruim (erros estatísticos grandes). O erro sistemático relativamente pequeno, de forma que a acurácia do valor médio* $\overline{y}$ *pode ser razoável.*

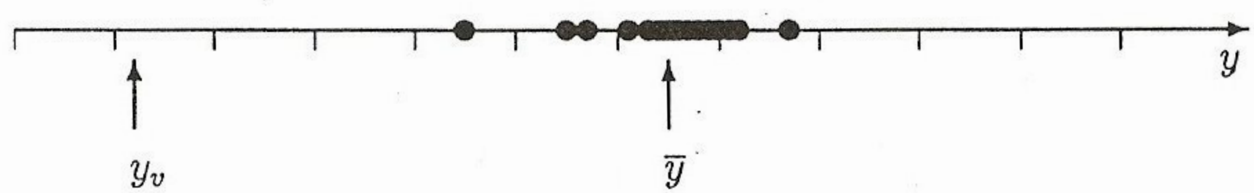


Figura 6.5. *Resultados de medições com precisão razoável e acurácia ruim. O valor médio* $\overline{y}$ *se distancia do valor verdadeiro* y_v.

J. H. Vuolo, *Fundamentos da teoria dos erros*, 1993

Erro e incerteza de uma medida

- **ERRO não é a mesma coisa que INCERTEZA!!!**

- **Erro** = *valor verdadeiro - valor medido*

  pode-se afirmar que **toda medida experimental apresenta um erro**, que precisa ser estimado e compreendido.

  O valor do erro NUNCA pode ser conhecido!

- **Incerteza** = melhor *estimativa do valor do erro*

http://sampa.if.usp.br/~suaide/blog/files/fap152.2007/Aula01.ppt

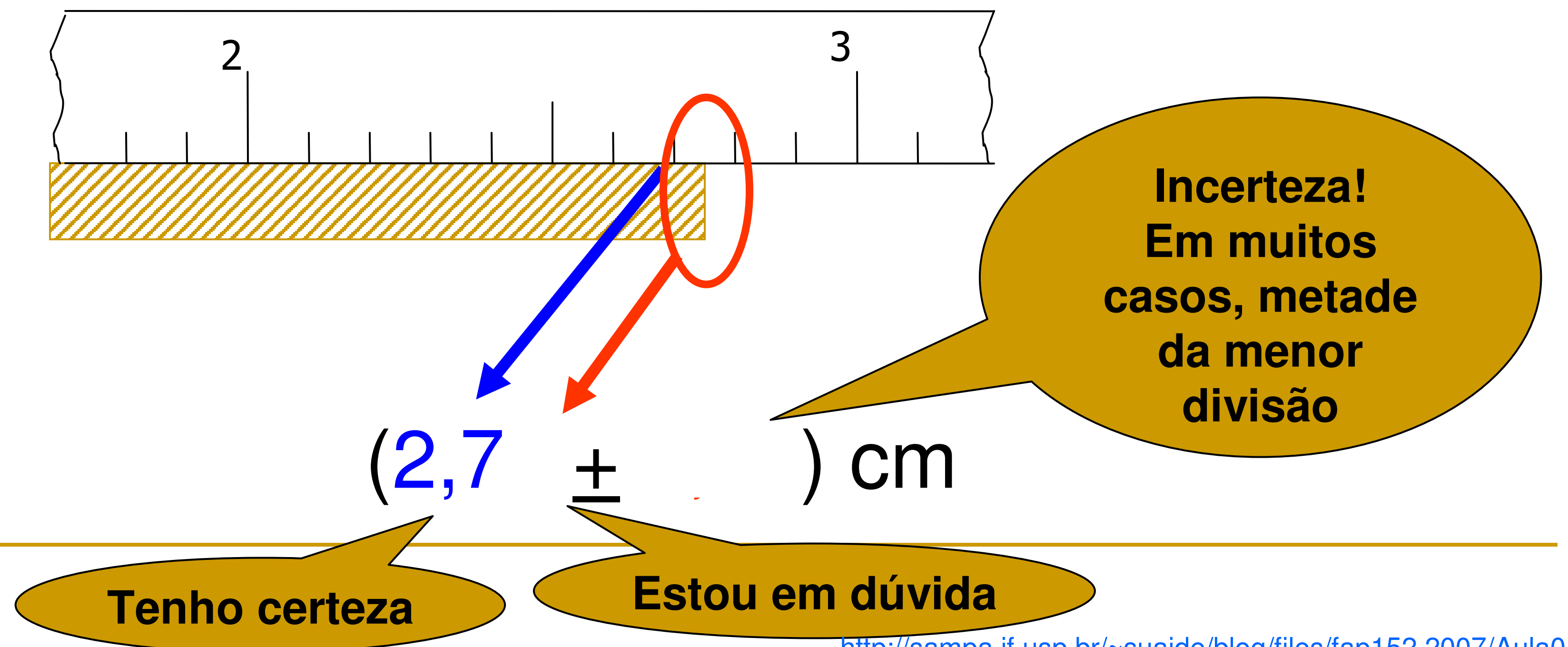
Apresentando o resultado de uma medida com incerteza

- Se toda medida tem uma incerteza, como representá-la?
  - Forma mais comum
    - (Valor $\pm$ incerteza) unidade
      - Ex: (24,50 $\pm$ 0,05) cm
  - Forma compacta
    - Valor(incerteza) unidade
      - Ex: 24,50(5) cm

http://sampa.if.usp.br/~suaide/blog/files/fap152.2007/Aula01.ppt

Apresentando o resultado de uma medida com incerteza

- Se toda medida tem uma incerteza, como representá-la?



http://sampa.if.usp.br/~suaide/blog/files/fap152.2007/Aula01.ppt

Apresentando o resultado de uma medida com incerteza

- Por que a incerteza é 0,05 e não 0,050 ou 0,053?
  - Em geral, a incerteza é expressa somente com 1 algarismo significativo (opcionalmente 2 algarismos, caso o primeiro seja 1 ou 2)
  - Caso o 1º. Algarismo seja >2, a importância do segundo é muito pequena e não vale a pena
- Note que a representação da medida deve levar em consideração a incerteza
  - **(2,74 + 0,05) cm**

http://sampa.if.usp.br/~suaide/blog/files/fap152.2007/Aula01.ppt

PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS NA SOMA OU SUBTRAÇÃO:

$$s \pm \Delta s = s \pm (|\Delta a| + |\Delta b| + |\Delta c| + \dots)$$

PROPAGAÇÃO DAS INCERTEZAS NA MULTIPLICAÇÃO, DIVISÃO, RADICIAÇÃO E POTENCIAÇÃO ($f = k \cdot a \cdot b^{\alpha} \cdot c^{\beta}$)

$$\underbrace{f}_{RM} \pm \Delta f = f \pm f \times \underbrace{\left(\left|\frac{\Delta k}{k}\right| + \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\alpha \frac{\Delta b}{b}\right| + \left|\beta \frac{\Delta c}{c}\right| \right)}_{\times\ RM}$$

$$f \pm \Delta f = \boxed{RM} \pm \Delta f$$

PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

c) Outros Casos: Argumentos de Funções

Nas situações em que os dados forem utilizados como argumento de funções, como sen(x), cos(x), log(x), x^n, e $x^{1/n}$, etc., deve-se calcular a incerteza resultante do valor da função no intervalo $x \pm \Delta x$ da seguinte forma:

- Calcule os extremos superior ($f_{sup.}$) e inferior ($f_{inf.}$) da função no intervalo $x \pm \Delta x$, isto é, calcule o valor da função em $x + \Delta x$ e em $x - \Delta x$, chamando a estes resultados, respectivamente, de $f_{sup.}$ e $f_{inf.}$

- Obtenha, então, o valor da função com a respectiva incerteza, $f \pm \Delta f$, aplicando a seguinte expressão:

PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS - ARGUMENTOS DE FUNÇÕES:

$$F = f \pm \Delta f = [\, ½ (f_{sup.} + f_{inf.})\,] \pm [\, ½ (f_{sup.} - f_{inf.})\,]$$

Incertezas do tipo A e do tipo B

- A distinção entre erro sistemático e estatístico é um tanto arbitrária.
- A distinção entre os dois tipos de erros depende do universo de medidas considerado.
  - Exemplos:
    - Normalmente o erro de calibração de um instrumento é considerado sistemático. Entretanto, quando são consideradas medições com instrumentos semelhantes, mas de diferentes marcas e procedências, espera-se que os erros de calibração sejam estatísticos.
    - Em um determinado equipamento, flutuações aleatórias da temperatura podem resultar em erro estatístico. Entretanto, pode existir correlação entre a flutuação da temperatura e os resultados da própria experiência, levando a um erro sistemático.

J. H. Vuolo, *Fundamentos da teoria dos erros*, 1993

Incertezas do tipo A e do tipo B

- Em função da relativa arbitrariedades nas definições de erro estatístico e erro sistemático, a recomendação atual é que as incertezas sejam classificadas como:
  - **Incerteza do Tipo A**: determinadas ou estimadas por métodos estatísticos.
  - **Incerteza do Tipo B**: determinadas ou estimadas por quaisquer outros métodos (não estatísticos).

- Para um determinado processo de medição, as incertezas do tipo A se referem aos erros usualmente entendidos como estatísticos e as incertezas do tipo B aos erros sistemáticos residuais.

J. H. Vuolo, *Fundamentos da teoria dos erros*, 1993

Incerteza padrão

c) Como estimar σ_o quando isso é necessário?

Há várias situações experimentais nas quais sabemos a priori o valor de σ_o. No entanto, em alguns casos não o sabemos. Quando isso acontece, é necessário estimarmos σ_o a partir dos próprios dados experimentais. Essa estimativa, que chamaremos de σ, é [4]

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 \quad . \tag{7}$$

É possível mostrar que essa é uma boa estimativa de σ_o^2: converge a σ_o^2 quando N tende a ∞ e não é tendenciosa. Assim, podemos escrever o resultado do experimento na forma

$$\text{Resultado} = \bar{x} \pm \sigma_m \tag{8}$$

onde $\sigma_m = \sigma/\sqrt{N}$ é a estimativa do desvio padrão da média.

Helene et al., RBEF, Vol. 13, p. 12, 1991

Análise estatística

- **Distribuição normal (Gaussiana):**

$$G(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Johann Carl F. Gauss, 1777-1855

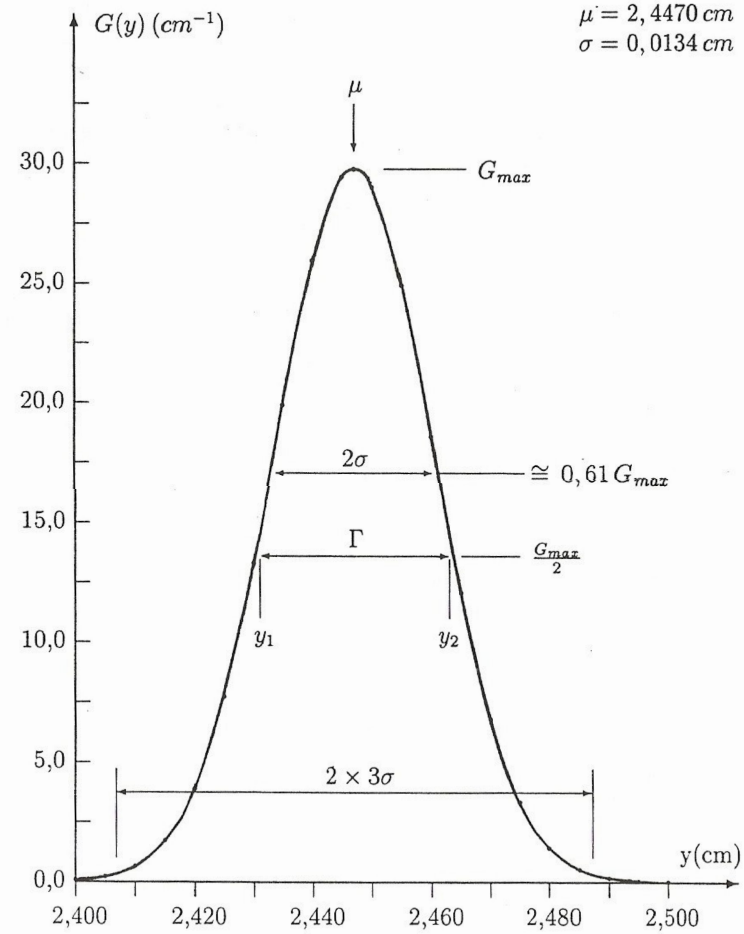


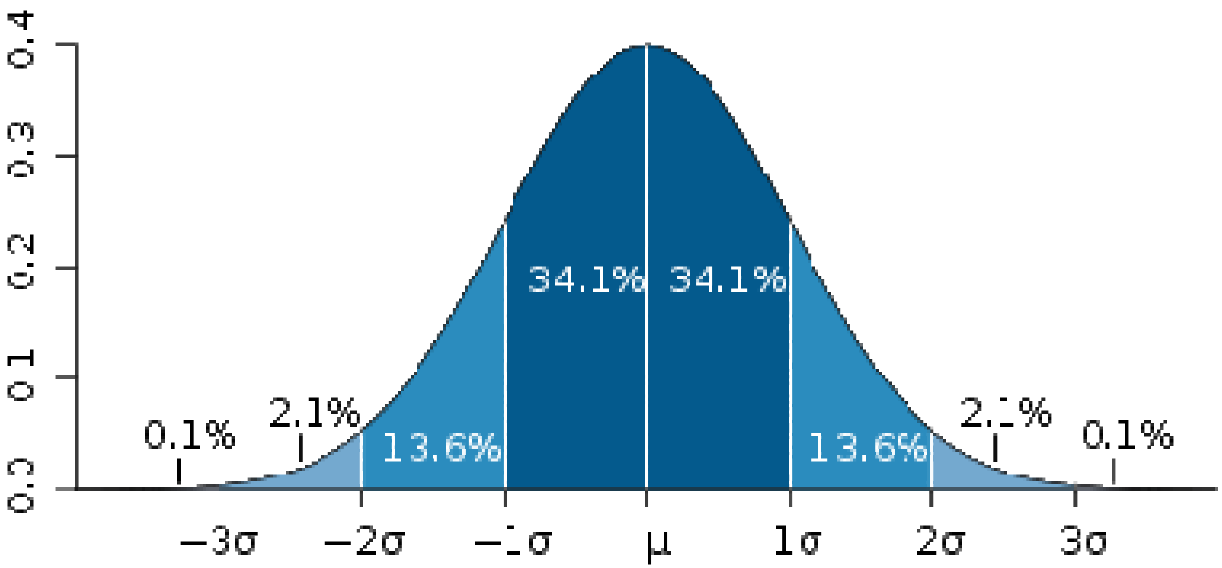
Figura 2.1. *Exemplo de distribuição gaussiana.*

J. H. Vuolo, *Fundamentos da teoria dos erros*, 1993

Análise estatística

- **Distribuição normal (Gaussiana):**

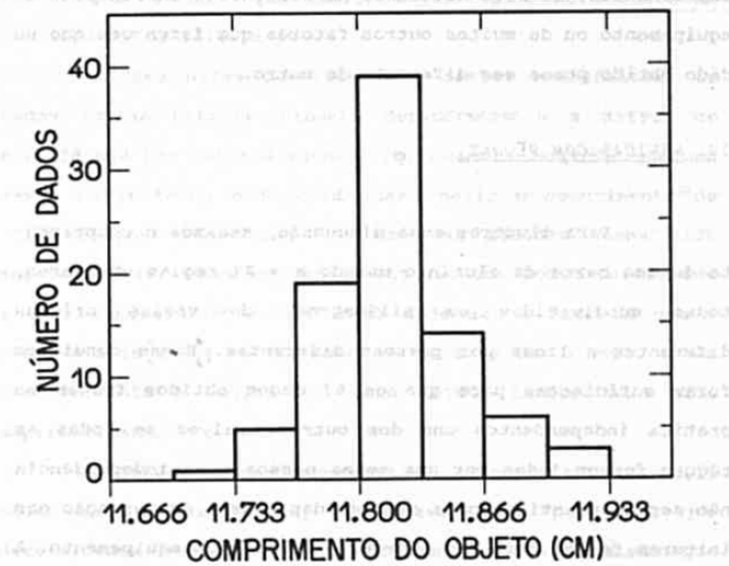
$$G(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Wikipedia, *Standard deviation*

Análise estatística

- **Distribuição normal (Gaussiana):**



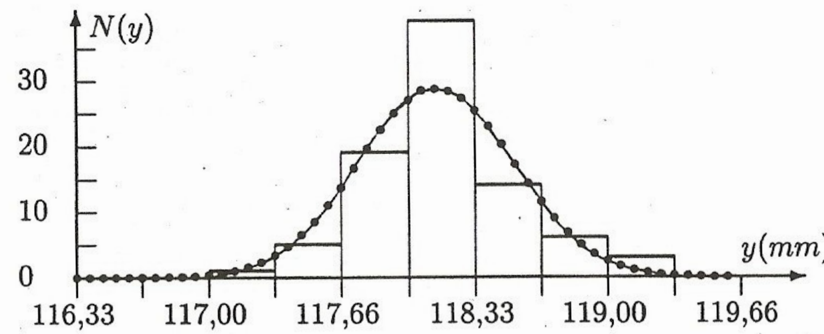


Figura 9.3. *Histograma de 87 medições de uma barra de alumínio, realizadas por diferentes pessoas e com diferentes réguas.*

Exemplo 4. A Figura 9.3 mostra um histograma de 87 medições do comprimento y de uma barra de alumínio, realizadas por diferentes pessoas e com réguas escolares de diferentes procedências[8] .

O valor médio e o desvio padrão *das medições* são respectivamente

$$\overline{y} = 118,14\,mm \qquad \text{e} \qquad \sigma = 0,39\,mm\,.$$

Helene et al., RBEF, Vol. 13, p. 12, 1991

J. H. Vuolo, *Fundamentos da teoria dos erros*, 1993

Análise estatística

- **Exemplos:**
  - **Medidas da distância focal de uma lente convergente.**

Tabela 2.1. *Valores obtidos para y em mm.*

204	206	208	210	211	218	219	222	222	223
227	229	230	232	235	235	235	235	237	237
237	237	238	238	239	239	239	239	239	240
240	241	243	244	244	246	246	248	248	249
250	250	253	256	257	257	257	259	259	260
262	265	267	268	269	269	269	273	285	289

J. H. Vuolo, *Fundamentos da teoria dos erros*, 1993

Análise estatística

- **Exemplos:**
  - **Medidas da distância focal de uma lente convergente.**

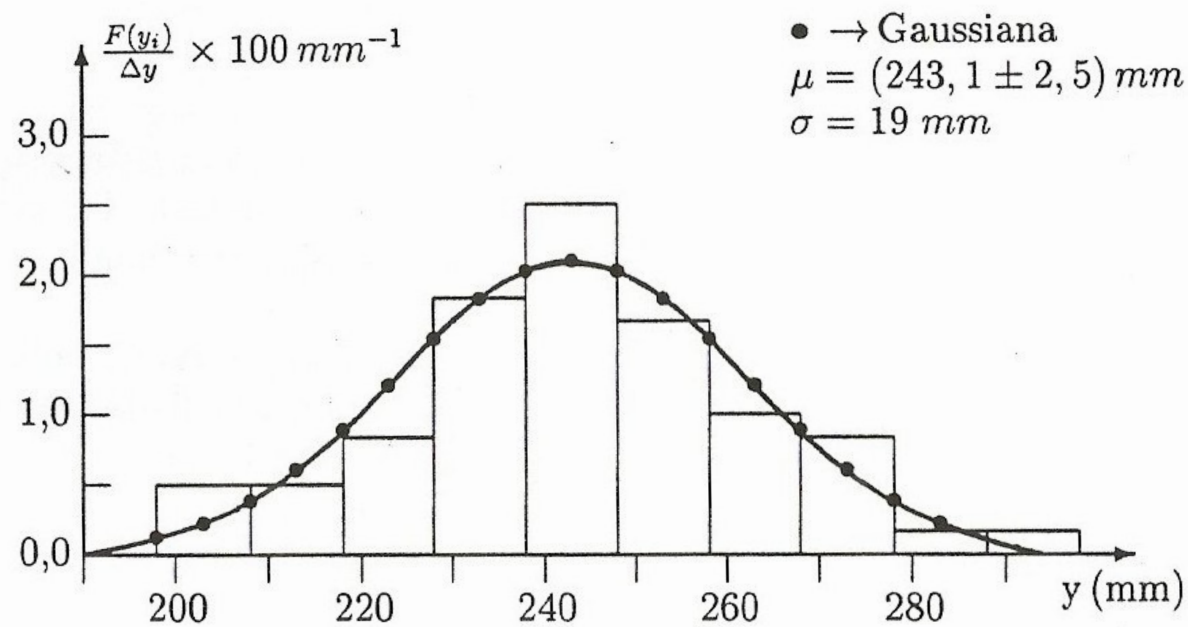


Figura 2.5. *Histograma para dados da Tabela 2.1, com* $\Delta y = 10\, mm$.

J. H. Vuolo, *Fundamentos da teoria dos erros*, 1993

Análise estatística

- **Exemplos:**
  - **Medidas da distância focal de uma lente convergente.**

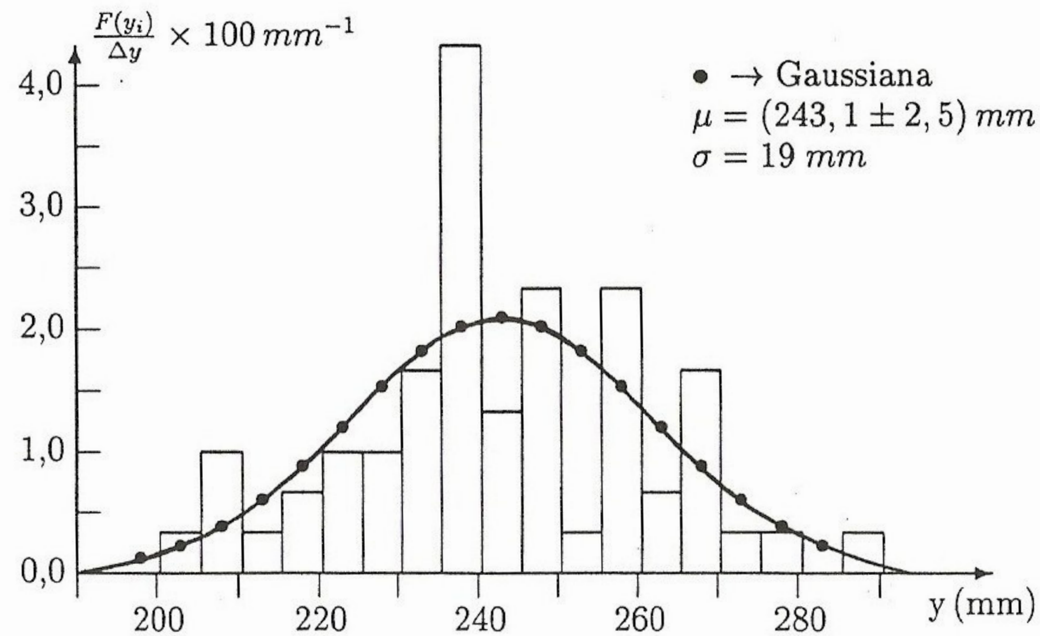


Figura 2.6. *Histograma correspondente aos dados da Tabela 2.1. Neste caso, a escolha do intervalo* $\Delta y = 5\, mm$ *é um pouco inadequada e resulta um histograma bastante "quebrado".*

J. H. Vuolo, *Fundamentos da teoria dos erros*, 1993

Leitura obrigatória:

- “O que é uma medida”, O. A. M. Helene, S. P. Tsai, R. R. P. Teixeira. *Rev. Bras. Ensino de Física*, **12**, 12-29, 1991.
- “Notas sobre algumas estatísticas utilizadas na síntese de resultados experimentais”, F. L. da Silveira. *Cad. Cat.. Ensino de Física*, **9** 27-37, 1992.

Bibliografia sugerida:

- Curso de Física Básica. Vol. 1 - Mecânica, Moisés Nussenzveig, Edgar Blücher, 1996.
- Fundamentos da teoria dos erros, J. Henrique Vuolo, Edgar Blücher, 1996.
- Tratamento estatístico de dados em física experimental, Otávio A. M. Helene, Edgar Blücher, 2004.
- Física, primeiro volume, Dalton Gonçalves, Ao Livro Técnico S. A., 1971.

Na internet:

- http://pessoal.utfpr.edu.br/fabris/laser/graduacao/fisica_exp/mat_complement.htm.
- http://www.profanderson.net/algarismosignificativo.html
- http://sampa.if.usp.br/~suaide/blog/files/fap152.2007/Aula01.ppt.
- http://www.defi.isep.ipp.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=78&Itemid=8.
- http://www.pion.sbfisica.org.br/pdc/index.php/por/material_didatico/erros_medidas_fisica_etc.