

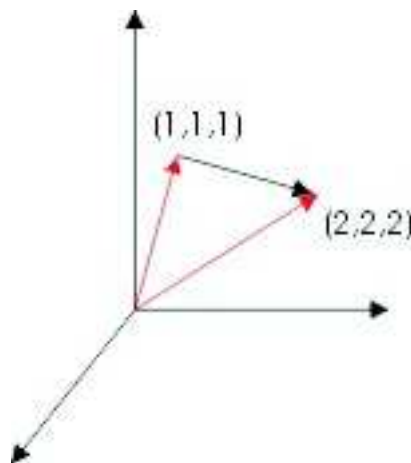
# 1 Complemento as aulas de Eletro 1

Esse documento é um complemento as aulas da disciplina, com parte do conteúdo abordada para uma melhor fixação.

## 1.1 Cálculo do campo elétrico

Vamos calcular o campo elétrico no ponto  $\vec{r} = (2, 2, 2)$  gerado por uma carga  $q$ , fixa no ponto  $\vec{r}' = (1, 1, 1)$ . O campo elétrico é dado pela fórmula:

Figura 1: Campo de uma carga pontual



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1)$$

$$\vec{r}' = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \quad (2)$$

$$\vec{r} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} \quad (3)$$

Calculando o vetor resultante e o seu módulo

$$\vec{r} - \vec{r'} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \quad (4)$$

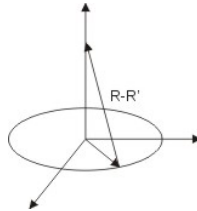
$$|\vec{r} - \vec{r'}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \quad (5)$$

Substituindo em 1 encontramos:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{3}^3} \quad (6)$$

## 1.2 Campo de um anel carregado

Figura 2: Campo de um anel carregado



A densidade linear de cargas  $\lambda$

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad (7)$$

$$\lambda dl = dq \quad (8)$$

$$\lambda a d\varphi = dq \quad (9)$$

Como queremos o ponto situado no eixo  $z$  definimos o vetor  $\vec{r} = R\hat{\mathbf{k}}$ . E o vetor que dá a posição das cargas:

$$\vec{r}' = a \cos \varphi \hat{\mathbf{i}} + a \sin \varphi \hat{\mathbf{j}} \quad (10)$$

E o módulo:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + a^2} \quad (11)$$

Calculamos o campo na forma:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq \quad (12)$$

Substituindo em 12:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(R\hat{\mathbf{k}} - a \cos \varphi \hat{\mathbf{i}} - a \sin \varphi \hat{\mathbf{j}})}{\sqrt{R^2 + a^2}^3} \lambda a d\varphi \quad (13)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + a^2}^3} \int (R\hat{\mathbf{k}} - a \cos \varphi \hat{\mathbf{i}} - a \sin \varphi \hat{\mathbf{j}}) d\varphi \quad (14)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + a^2}^3} \left[ \int R d\varphi \hat{\mathbf{k}} - \int a \cos \varphi d\varphi \hat{\mathbf{i}} - \int a \sin \varphi d\varphi \hat{\mathbf{j}} \right] \quad (15)$$

Resolvendo a integral no intervalo de  $0$  a  $2\pi$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + a^2}^3} \left[ 2\pi R a \hat{\mathbf{k}} + a^2 \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} \hat{\mathbf{i}} - a^2 \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} \hat{\mathbf{j}} \right] \quad (16)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + a^2}^3} \left[ 2\pi R a \hat{\mathbf{k}} + 0\hat{\mathbf{i}} - 0\hat{\mathbf{j}} \right] \quad (17)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}^3} 2\pi R a \hat{\mathbf{k}} \quad (18)$$

De acordo com 9 escrevemos  $\mathbf{q} = 2\pi\lambda\mathbf{a}$  e no caso em que  $R^2 \gg a^2$ , temos:

$$\vec{E} = \frac{\mathbf{q}R}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{q}}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{k}} \quad (19)$$

Então, quando observamos o campo em uma distância maior que a ordem da dimensão do anel, o campo tem a forma da lei de Coloumb. Logo ele se comporta como se fosse o campo de uma carga pontual.

Quando Estamos no centro do anel  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  encontramos também  $\vec{E} = 0$ .

### 1.3 Campo de um anel com cargas não uniformes

No caso anterior analisamos o campo de um anel com as cargas distribuídas uniformemente. Aqui desenvolveremos os passos para a resolução de quando as cargas não são distribuídas uniformemente.

$$\lambda = \lambda_0 \cos \varphi \quad (20)$$

Podemos ver facilmente que a carga total é nula. Basta integrar essa densidade em todo o circuito do anel.

$$\mathbf{q} = \int_0^{2\pi} \lambda_0 \cos \varphi \quad (21)$$

Vamos verificar o campo agora. Substituindo em 12:

$$\vec{E} = \frac{\lambda_0 a}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}^3} \int_0^{2\pi} (R \cos \varphi \hat{\mathbf{k}} - a \cos^2 \varphi \hat{\mathbf{i}} - a \sin \varphi \cos \varphi \hat{\mathbf{j}}) d\varphi \quad (22)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda_0 a}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}^3} \left[ \int_0^{2\pi} R \cos \varphi \hat{\mathbf{k}} d\varphi - \int_0^{2\pi} a \cos^2 \varphi \hat{\mathbf{i}} d\varphi - \int_0^{2\pi} a \sin \varphi \cos \varphi \hat{\mathbf{j}} d\varphi \right] \quad (23)$$

Substituindo  $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi)$

$$\vec{E} = \frac{\lambda_0 a}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}^3} \left[ \int_0^{2\pi} R \cos \varphi \hat{\mathbf{k}} d\varphi - \int_0^{2\pi} a \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) \hat{\mathbf{i}} d\varphi - \int_0^{2\pi} a \sin \varphi \cos \varphi \hat{\mathbf{j}} d\varphi \right] \quad (24)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda_0 a}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}^3} \left[ R \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} \hat{\mathbf{k}} - a \frac{1}{2} (\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi) \Big|_0^{2\pi} \hat{\mathbf{i}} + a \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \Big|_0^{2\pi} \hat{\mathbf{j}} \right] \quad (25)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda_0 a}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}^3} [0(R\hat{\mathbf{k}}) - a\pi\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}}] \quad (26)$$

$$\vec{E} = -\frac{\lambda_0 a^2 \pi}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}^3} \hat{\mathbf{i}} \quad (27)$$

Chamamos  $\lambda_0 a^2 \pi = \rho$  e  $\mathbf{k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , e observando o campo onde  $\mathbf{R} \gg \mathbf{a}$

$$\vec{E} = -\mathbf{k} \frac{\rho}{R^3} \hat{\mathbf{i}} \quad (28)$$

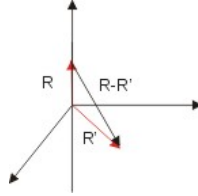
No ponto  $\mathbf{R} = 0$

$$\vec{E} = -\frac{\lambda_0 a^2 \pi}{4\pi\epsilon_0 a^3} \hat{\mathbf{i}} \quad (29)$$

$$\vec{E} = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi}{a} \hat{\mathbf{i}} \quad (30)$$

## 1.4 Fio carregado

Figura 3: Campo de um fio carregado



Escrevemos a densidade linear do fio posicionado no eixo Z

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad (31)$$

$$\lambda dz = dq \quad (32)$$

$$\vec{r}' = z\hat{k} \quad (33)$$

Vamos calcular o campo apenas no plano XY

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad (34)$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = x\hat{i} + y\hat{j} - z\hat{k} \quad (35)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{R^2 + z^2} \quad (36)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq \quad (37)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(x\hat{i} + y\hat{j} - z\hat{k})}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} \lambda d\mathbf{z} \quad (38)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( x \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} d\mathbf{z} \hat{i} + y \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} d\mathbf{z} \hat{j} - \int \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} d\mathbf{z} \hat{k} \right) \quad (39)$$

Primeiro resolvemos a componente  $\hat{k}$ , considerando o fio infinito

$$\int \frac{z}{\sqrt{\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_t}^3} \hat{j} \quad (40)$$

$$2z d\mathbf{z} = dt \quad (41)$$

Substituindo na integral temos:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = -t^{-\frac{1}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad (42)$$

Resolvendo as integrais das outras componentes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} d\mathbf{z} \quad (43)$$

Fazendo  $r^2 = x^2 + y^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} d\mathbf{z} \quad (44)$$

Resolvendo por substituição trigonométrica, fazemos  $z = r \tan \theta$  e  $d\mathbf{z} = r \sec^2 \theta$ . Os limites de integração serão  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  a  $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \theta}{\sqrt{r^2 + r^2 \tan^2 \theta}^3} d\theta \quad (45)$$

$$\frac{1}{r^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}^3} d\theta \quad (46)$$

Lembrando que  $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$

$$\frac{1}{r^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^3 \theta} d\theta \quad (47)$$

$$\frac{1}{r^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sec \theta} d\theta \quad (48)$$

$$\frac{1}{r^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{1}{r^2} \sin \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{r^2} \quad (49)$$

Então substituindo no campo elétrico

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{r^2} (x\hat{i} + y\hat{j}) \quad (50)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{r^2} \vec{r} \quad (51)$$