Universidade de São Paulo - USP

FGE0270-ELETRICIDADE ($2^0$ SEMESTRE 2006)

Professor: Guennadii Gusev

Monitor: Álvaro Diego B. Maia

Esse documento é um complemento as aulas da disciplina, com parte do conteúdo abordada para uma melhor fixação.

# Expansão do potêncial

Primeiramente vamos resolver o potêncial de uma carga pontual em séries de Taylor.

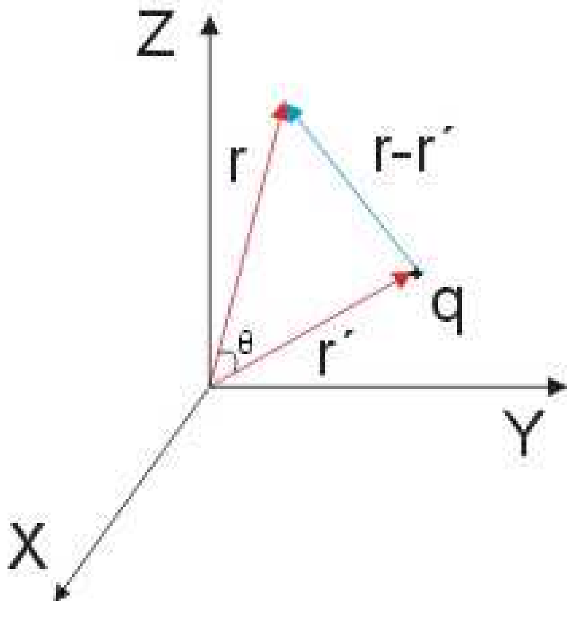


Figura 1: Potêncial de uma carga

O pototêncial é da forma:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|}$$

Calculamos o módulo

$$\left|\vec{r}-\vec{r'}\right| = \sqrt{|r|^2+|r'|^2-2\vec{r}.\vec{r'}\cos\theta}$$

Subistituindo no potêncial

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\sqrt{|r|^2+|r'|^2-2\vec{r}.\vec{r'}\cos\theta}}$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r\sqrt{1+\frac{r'^2}{r^2}-2.\frac{r'}{r}\cos\theta}}$$

Considerando $r >> r\prime$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r\sqrt{1-2.\frac{r'}{r}\cos\theta}}$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}\left(1-2.\frac{r'}{r}\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Fazendo a expansão em séries de taylor

$$(x+1)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\dots$$

Para a expansão de dipolo de uma carga, consideramos a expansão até o termo de primeira ordem

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}\left(1+\frac{r'}{r}\cos\theta\right)$$

O primeiro termo é chamado de monopolo e o segundo de dipolo

# Dipolo Linear

Cálculo do campo gerado por duas cargas pontuais, de mesmo modulo e sinais opostos fixas no eixo z.

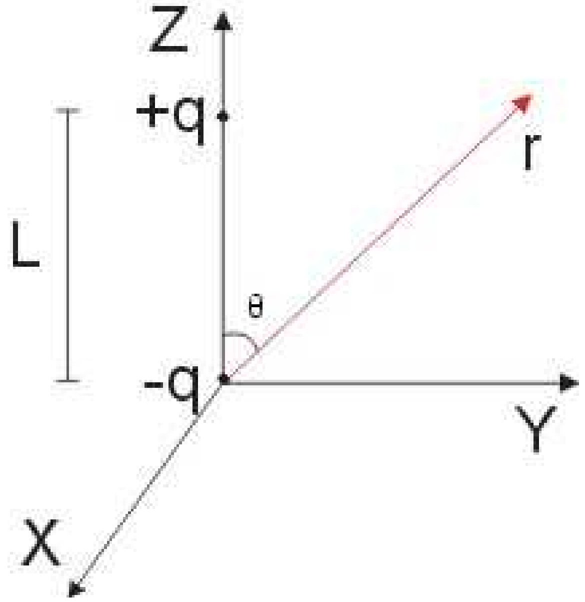


Figura 2: Dipolo Linear

Calculamos o potêncial de cada carga separadamente

$$\overrightarrow{r'_1} = 0$$

$$\varphi_1 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}$$

E para a carga +q

$$\overrightarrow{r'_2} = L\hat{z}$$

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\left|\vec{r} - \overrightarrow{r'}\right|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}\left(1 + \frac{l}{r}\cos\theta\right)$$

Somando os dois

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}\left(1 - 1 + \frac{l}{r}\cos\theta\right)$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{l}{r^2}\cos\theta$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{lr}{r^3}\cos\theta$$

Fazendo $q\vec{l} = \vec{p}$ temos $\vec{p}.\vec{r} = qlr\cos\theta$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\vec{p}.\vec{r}}{r^3}$$

Para simplificar, vamos considerar o campo apenas no plano yz, isto é,x $= 0$

$$\vec{r} = y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{p}.\vec{r} = 0.y + lz = lz$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{lz}{\sqrt{y^2 + z^2}^{\,3}}$$

Para encontrar o campo gerado pelo dipolo, sabemos que:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial x}\varphi\hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial}{\partial y}\varphi\hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial}{\partial z}\varphi\hat{\mathbf{k}}$$

$$E_x = \frac{\partial}{\partial x}\varphi$$

$$E_y = -\frac{\partial}{\partial y}\varphi = -\frac{ql}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}^{\,3}}$$

$$E_y = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_o}3\frac{zy}{\sqrt{y^2+z^2}^{\,5}}$$

$$E_y = \frac{3}{4}\frac{ql}{\pi\varepsilon_o}\frac{zy}{r^5}$$

$$E_y = \frac{3}{4}\frac{ql}{\pi\varepsilon_o r^3}\frac{z}{r}\frac{y}{r}$$

Se considerarmos um triangulo dos vetores z e r tendo r como hipotenusa, encontramos; $\frac{y}{r} = \sin\theta$ e $\frac{z}{r} = \cos\theta$

$$E_y = \frac{3}{4}\frac{ql}{\pi\varepsilon_o}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^3}$$

A componente z do campo:

$$E_z = -\frac{\partial}{\partial z}\varphi = -\frac{ql}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}^{\,3}}$$

$$E_z = -\frac{ql}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}^{\,3}} + \frac{ql}{4\pi\varepsilon_o}\frac{3z^2}{\sqrt{y^2+z^2}^{\,5}}$$

$$E_z = -\frac{ql}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r^3} + \frac{ql}{4\pi\varepsilon_o}\frac{3z^2}{r^5}$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{p}{r^3} + \frac{3p}{r^3}\frac{z}{r}\frac{z}{r}\right)$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{p}{r^3} + \frac{3p}{r^3}\cos^2\theta\right)$$

$$E_z = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o r^3}(3\cos^2\theta - 1)$$

Agora calcular o modulo do campo E

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$$

$$E = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\frac{ql}{\pi\varepsilon_o}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_o r^3}(3\cos^2\theta - 1)\right)^2}$$

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o r^3}\sqrt{(3\sin\theta\cos\theta)^2 + (3\cos^2\theta - 1)^2}$$

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o r^3}\sqrt{9\sin^2\theta\cos^2\theta + 9\cos^4\theta - 6\cos^2\theta + 1}$$

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o r^3}\sqrt{9(1 - \cos^2\theta)\cos^2\theta + 9\cos^4\theta - 6\cos^2\theta + 1}$$

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o r^3}\sqrt{9\cos^2\theta - 9\cos^4\theta + 9\cos^4\theta - 6\cos^2\theta + 1}$$

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

## Quadrupolo

Para encontrar o termo de quadrupolo, consideramos o termo de segunda ordem da expansão do potêncial.

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r\sqrt{1+\frac{r'^2}{r^2}-2.\frac{r'}{r}\cos\theta}}$$

$$(x+1)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

Assim temos:

$$(x+1)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2$$

$$x = \frac{r'^2}{r^2} - 2.\frac{r'}{r}\cos\theta$$

$$\left(\frac{r'^2}{r^2} - 2.\frac{r'}{r}\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{r'}{r} + \frac{r'}{r}\cos\theta + \frac{3}{8}\left(\frac{r'}{r}\right)^4 - \frac{3}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2\cos^2\theta$$

Desconsideramos os termos ao cubo e ao quadrado, ja que $r >> r\prime$

$$\left(\frac{r'^2}{r^2} - 2.\frac{r'}{r}\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{r'}{r}\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2(3\cos^2\theta - 1)$$

E o potêncial fica

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}\left(1 + \frac{r'}{r}\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2(3\cos^2\theta - 1)\right)$$

O novo termo dessa expansão é chamdo termo de quadrupolo. Se considerar mais um termo na expansão encontraremos o de octopolo e assim por diante.

## Quadrupolo Linear

Agora que exapandimos o potêncial até o termo de quadrupolo, vamos calcular o termo de quadrupolo linear. Todas as cargas fixas no eixo z.

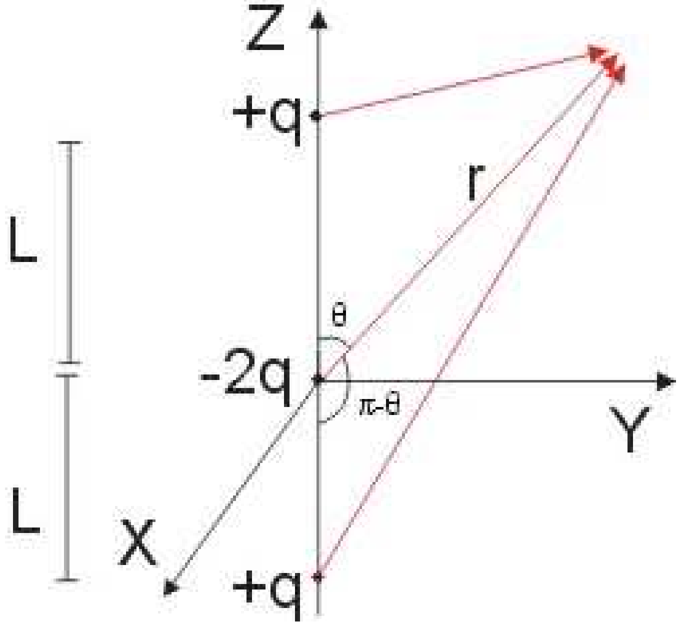


Figura 3: Quadrupolo Linear.

Calculamos o potêncial de cada carga. Considerando as cargas fixas na origem

como uma única carga:

Carga 1

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_1'\right|}$$

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}\left(1 + \frac{r'}{r}\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2(3\cos^2\theta - 1)\right)$$

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}\left(1 + \frac{l}{r}\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2(3\cos^2\theta - 1)\right)$$

Carga 2

$$\varphi_2 = \frac{-2q}{4\pi\varepsilon_o r}$$

Carga 3

$$\varphi_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r'_3}\right|}$$

$$\varphi_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}\left(1 + \frac{r'}{r}\cos(\pi - \theta) + \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2(3\cos^2(\pi - \theta) - 1)\right)$$

$$\varphi_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}\left(1 - \frac{l}{r}\cos\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2(3\cos^2\theta - 1)\right)$$

Encontrando o potêncial total

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}\left[\begin{array}{c} \frac{-2}{r} + 1 + \frac{l}{r}\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2(3\cos^2\theta - 1) + 1 + \frac{l}{r}\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2(3\cos^2\theta - 1) \\ +1 - \frac{l}{r}\cos\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2(3\cos^2\theta - 1) \end{array}\right]$$

$$\varphi = \frac{ql^2}{4\pi\varepsilon_o r^3}(3\cos^2\theta - 1)$$

## Quadrupolo Planar

Esse quadrupolo tem a geometria diferente do anterior. Agora as cargas estão dispostas em um plano, formando um quadrado de lado a.

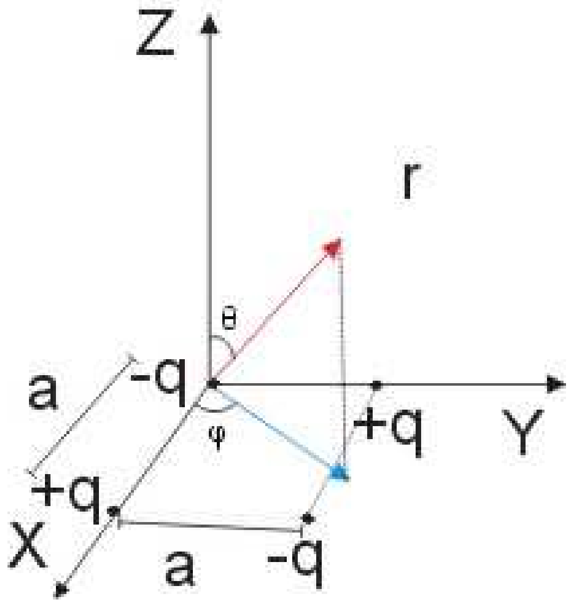

Figura 4: Quadrupolo Planar

Escrevemos o vetor $\vec{r}$ e o potêncial de cada carga

$$\vec{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\varphi_1 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r}$$

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r_2'}\right|}$$

$$\varphi_3 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r_3'}\right|}$$

$$\varphi_4 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r_4'}\right|}$$

Escrevemos os vetores $\vec{r}'$ de cada carga

$$\vec{r}_1' = 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{r}'_2 = a\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}$$
$$\vec{r}'_3 = a\hat{\mathbf{i}} + a\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}$$
$$\vec{r}'_4 = 0\hat{\mathbf{i}} + a\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}$$

No plano $z = 0$ encontramos:

$$\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}'_2\right|} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - 2ax}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2ax + a^2}} = \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{2ax}{r^2} + \frac{a^2}{r^2}}}$$

$$\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}'_3\right|} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay + 2a^2}} = \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{2a(x+y)}{r^2} + \frac{2a^2}{r^2}}}$$

$$\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}'_4\right|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - 2ay}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2ay + a^2}} = \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{2ay}{r^2} + \frac{a^2}{r^2}}}$$

Expandindo os potênciais separadamente

$$(x+1)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2$$

$$\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}'_2\right|} = \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{2ax}{r^2} + \frac{a^2}{r^2}}} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{ax}{r^2} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3}{2}\frac{a^2x^2}{r^4} + \frac{3}{2}\frac{a^3x}{r^4} + \frac{3}{8}\frac{a^4}{r^4}\right)$$

$$\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}'_3\right|} = \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{2a(x+y)}{r^2} + \frac{2a^2}{r^2}}} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a(x+y)}{r^2} - \frac{a^2}{r^2} + \frac{3}{2}\frac{2a^2x^2}{r^4} + \frac{3}{2}\frac{2a^3x}{r^4} + \frac{3}{8}\frac{2a^4}{r^4}\right)$$

$$\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}'_4\right|} = \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{2ay}{r^2} + \frac{a^2}{r^2}}} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{ay}{r^2} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3}{2}\frac{a^2y^2}{r^4} + \frac{3}{2}\frac{a^3y}{r^4} + \frac{3}{8}\frac{a^4}{r^4}\right)$$

Somamos o potencial de cada carga pra encontrar o potencial total do quadrupolo

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}\left[\begin{array}{c} -1 + 1 + \frac{ax}{r^2} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3}{2}\frac{a^2x^2}{r^4} + \frac{3}{2}\frac{a^3x}{r^4} + \frac{3}{8}\frac{a^4}{r^4} - 1 - \frac{a(x+y)}{r^2} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{3}{2}\frac{2a^2x^2}{r^4} - \frac{3}{2}\frac{2a^3x}{r^4} - \frac{3}{8}\frac{2a^4}{r^4} \\ +1 + \frac{ay}{r^2} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3}{2}\frac{a^2y^2}{r^4} + \frac{3}{2}\frac{a^3y}{r^4} + \frac{3}{8}\frac{a^4}{r^4} \end{array}\right]$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}\left[-\frac{3a^2}{r^4}xy + \frac{3}{4}\frac{a^4}{r^4} - \frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}\right]$$

Desprezando os termos elevados a quarta

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{3a^2}{r^5}xy$$

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{3a^2}{r^3}\frac{x}{r}\frac{y}{r}$$

Em coordenadas esféricas:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{3a^2}{r^3}\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi$$