Capítulo 5

Dielétricos e Capacitores

Neste capítulo vamos começar apresentando uma porção de fenômenos já conhecidos da maior parte de vocês e vamos relacioná-los tentando, ao sistematizá-los, produzir fórmulas matemáticas que os expressem.

5.1 Rigidez Dielétrica

Já vimos anteriormente a diferença entre um dielétrico e um condutor. Nos dielétricos (ou isolantes) os elétrons estão presos aos núcleos dos átomos e portanto, ao contrário dos metais, não existem elétrons livres nessa substância.

Dado isto, sabemos que se um campo elétrico for aplicado a um dielétrico, vai haver uma tendência de afastar os elétrons de seus núcleos devido à força externa. Mas o que acontece se aumentarmos muito o campo elétrico externo? É claro que a força que age em cada elétron vai aumentando também, proporcionalmente. Isto pode chegar ao ponto em que a força externa fica *maior* do que a força externa que liga o elétron ao seu núcleo. Quando isto acontece, os elétrons passarão a ser livres - TRANSFORMANDO ENTÃO UM DIELÉTRICO EM UM CONDUTOR!!!

Esse processo pode ocorrer com qualquer isolante e o campo elétrico aplicado que o transforma em condutor vai depender da estrutura de cada material.

O valor mínimo do campo elétrico que deve ser aplicado a um dielétrico para tranformá-lo em condutor é denominado RIGIDEZ DIELÉTRICA. Cada material tem seu valor próprio de rigidez dielétrica, dadas as diferentes estruturas microscópicas de cada um deles.

Verifica-se *experimentalmente* que a rigidez dielétrica do vidro é $14 \times 10^6 N/C$ (unidade de campo elétrico!!) enquanto a da mica pode atingir $100 \times 10^6 N/C$. A rigidez dielétrica do ar em contrapartida, é bem menor, $3 \times 10^6 N/C$.

5.2 Compreendendo centelhas elétricas a partir do fenômeno da rigidez elétrica

Consideremos duas placas eletrizadas com cargas de sinais contrários, separadas por uma camada de ar. Se o campo elétrico criado por essas placas for inferior a $3 \times 10^6 N/C$, o ar entre elas permanecerá isolante e impedirá que aja passagem de uma placa à outra. Entretanto, se o campo exceder esse valor, a rigidez dielétrica do ar será rompida e o ar se transfromará em um *condutor*.

As cargas, neste momento, ficarão livres e serão atraídas para as placas com cargas opostas a elas. Isso ocasiona uma descarga elétrica entre as placas.

Mais fenomenologia: esta descarga vem acompanhada de emissão de luz e um estalo que é causado pela expansão do ar que se aquece com a descarga elétrica.

A Física e nosso dia a dia:

1) Cada vez que observamos uma faísca elétrica saltar de um corpo para outro (do pente para o cabelo, entre os terminais de um interruptor elétrico, etc) podemos concluir que a rigidez dielétrica do ar situado entre esses corpos foi ultrapassado e ele se tornou um condutor.

2) Outro fenômeno comum ligado à rigidez dielétrica é o raio em uma tempestade, que vem acompanhado de um relâmpago e um trovão. Pilotos (corajosos!) verificaram que durante uma tempestade, ocorre uma separação de cargas nas nuvens, ficando as nuvens mais baixas eletrizadas negativamente e as mais altas, positivamente.

Então é fácil imaginar que vai haver um campo elétrico entre essas nuvens. Além disso, a nuvem mais baixa (carregada negativamente) vai induzir uma carga positiva na superfície da Terra e estabelece-se entre essas duas também um campo

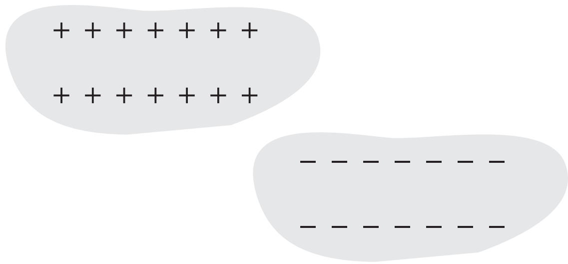

Figura 5.1: Nuvens carregadas

elétrico. Estamos prontos para entender os raios: à medida que cargas elétricas vão se acumulando nas nuvens, as intensidades dos campos elétricos vão aumentando e ultrapassam a rigidez dielétrica do ar. Quando isso acontece, o ar torna-se condutor e aparece um relâmpago, que nada mais é do que uma *enorme* centelha elétrica que salta de uma nuvem para outra, ou de uma nuvem para a Terra. Essa descarga elétrica aquece o ar, provocando uma expansão que se propraga na forma de uma onda sonora, originando o trovão.

Mais fenomenologia: Como funcionam os pára-raios?

Os pára-raios foram inventados pelo cientista americano Benjamim Franklin no século XVIII. Ele observou que os relâmpagos eram muito semelhantes ás centelhas elétricas que se vê saltarem entre dois corpos eletrizados em laboratório. Suspeitou então, que os raios fossem enormes centelhas causadas por eletricidade, que por algum processo desenvolviam-se nas nuvens. Para verificar suas idéias ele realizou uma experiência que ficou famosa: durante uma tempestade Franklin empinou um papagaio de papel tentando transferir a eletricidade que ele acreditava existir nas nuvens para alguns aparelhos do seu laboratório. Ligando a linha do papagaio à esses aparelhos, Franklin verificou que eles adquiriam carga elétrica, comprovando sua hipótese!

Com esse conhecimento e ainda a verificação experimental (que pode ser hoje comprovado teoricamente) de que quando temos objetos carregados as cargas costumam acumular-se nas pontas, resolveu construir assim um aparelho para "atrair" os raios e não causar os danos que causariam se caíssem aleatoriamente. Assim nasceu o pára-raios, um objeto bastante pontudo, ligado ao solo, de preferência em ligares onde poucos danos seriam produzidos. Funcionou, como sabemos!!

Agora que você já aprendeu a essência de alguns fenômenos elétricos, vamos testar se você consegue transferir esses conhecimentos para outras situações:

5.3 Questões Desafios

1) Qual a explicação para o fato de a mica ter sido usada durante muito tempo como isolante elétrico em diversos aparelhos?

Por ter Rigidez Dielétrica muito elevada.

2) Você poderia usar um vidro Pirex como isolante elétrico em um aparelho no qual ele estaria submetido a um campo elétrico de $2.0 \times 10^7 N/C$? Por quê?

Não. Sua rigidez elétrica é menor que este valor. *Consulte uma tabela.*

3) Sabe-se que quando uma esfera condutora no ar recebe uma carga elétrica que vai sendo aumentada gradualmente, há um limite para o valor da carga que a esfera pode reter. Após esse limite ser atingido

a) O que acontece com a carga que é transferida à esfera?

Escoa para o ar.

b) O que se pode afirmar sobre o campo elétrico na superfície da esfera?

É superior à rigidez dielétrica do ar.

5.4 Capacitores

Um capacitor é um dos muitos tipos de dispositivos usados em circuitos elétricos de rádios, computadores, etc. Capacitores microscópicos formam a memória dos bancos de dados dos computadores. A importância dos capacitores está principalmente na sua propriedade de armazenar energia elétrica. Pode-se fazer com que eles armazenem e liberem energia em conjugação com outras funções do circuito.

A definição mais precisa de um capacitor é a que ele consiste em dois condutores que estão próximos, porém isolados um do outro.

Capacitância é a quantificação do poder que tem um capacitor de armazenar energia. Mais precisamente, a capacitância é a razão entre o módulo Q da carga em cada placa e a diferença de potencial entre as placas.

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Por convenção, as grandezas nessa equação são positivas; Q se define como o módulo da carga em cada placa e ΔV é o módulo da diferença de potencial entre as placas. Consequentemente, a capacitância C é sempre positiva.

Outro ponto importante a ressaltar é que a capacitância é uma propriedade associada à geometria do arranjo formado por condutores e ao meio que existe entre eles. A unidade de capacitância no SI é o Faraday

$$1F = \frac{1C}{1V}$$

Os capacitores usuais tem capacitâncias da ordem de microfaradays

$$1\mu F = 1 \times 10^{-6} F$$

1) Calcule a capacitância de um capacitor plano paralelo de área A e distância L entre os planos no vácuo. Discuta o que acontece quando esse capacitor é preenchido por um dielétrico em duas situações:

a) O capacitor plano paralelo de área A que tem inicialmente o vácuo entre os planos e está submetido a uma diferença de potencial V, quando adquire uma carga Q. Esse capacitor é desconectado de fios externos sendo mantido isolado antes da introdução do dielétrico.

b) idem, mas mantendo a diferença de potencial fixa.

A diferença de potencial entre duas placas condutoras depende da carga nestas placas. É conveniente portanto primeiro obter a expressão para a diferença entre os potenciais elétricos dos dois planos.

$$\Delta V = |-\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}|$$

Onde $\mathbf{L}$ é o vetor na direção normal e

$$\mathbf{E} = \left(\frac{|Q|}{2\epsilon_0 A} - \frac{|Q|}{2\epsilon_0 A} \right) \mathbf{n} = \frac{|Q|}{\epsilon_0 A} \mathbf{n}$$

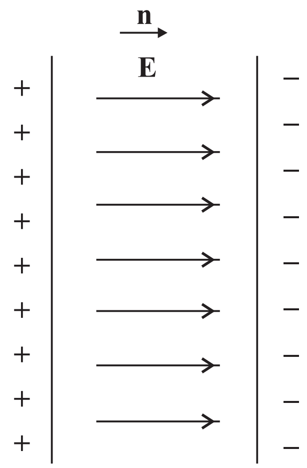

Figura 5.2: Capacitor de placas paralelas

E,

$$\Delta V = \frac{QL}{\epsilon_0 A}$$

Portanto

$$C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} = \frac{\epsilon_0 A}{L}$$

Note a dependência dos fatores geométricos A e L e vê-se portanto que a capacitância cresce com a área e decresce com a distância. Isso nos mostra duas possibilidades de alterar a capacitância de dispositivos em geral. Mas existe ainda uma outra maneira, que é muito usada por ser eficiente: colocar um dielétrico entre as placas do capacitor. As placas condutoras podem ser fixadas no dielétrico. Porque colocar um dielétrico altera a capacitância? O campo elétrico entre as placas num meio dielétrico é dado por

$$\mathbf{E} = \frac{|Q|}{\epsilon A}$$

Onde ϵ é a permissividade do meio. Como $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ é, para os materiais usualmente utilizados, maior que 1, o campo elétrico diminui. Isso provoca automaticamente uma diminuição na diferença de potencial e assim um aumento na capacitância

$$C = \frac{\epsilon A}{L}$$

É interessante notar também que o módulo da rigidez dielétrica dos materiais utilizados é maior do que a do ar, o que tem como consequência imediata que esse tipo de capacitor pode ser submetido a campos mais intensos do que o ar. Quando a rigidez dielétrica do material é atingida, o capacitor é danificado pois, como discutimos anteriormente, como no caso dos raios, haverão descargas elétricas de um condutor a outro. Portanto, colocar um dielétrico dentro de um capacitor torna-o mais estável.

Podemos tornar essas idéias mais quantitativas. A capacitância de um capacitor plano no vácuo, como vimos, é dada por

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{L}$$

Nessas condições, suponhamos que este capacitor seja desconectado de fios externos e seja mantido isolado. Agora tomemos um dielétrico de permissividade ϵ e colocamos em seu interior, preenchendo todo o seu volume. A capacitância vai mudar para

$$C_d = \frac{\epsilon A}{L}$$

E a razão entre as duas capacitâncias

$$\frac{C_0}{C_d} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} = K$$

Onde $K > 1$ é chamado constante dielétrica. A nova capacitância C_d, pode ainda ser escrita como

$$C_d = \frac{Q}{V_d}$$

Uma vez que a carga não mudou. O que será que acontece com o potencial? Podemos calcular V_d da seguinte maneira

$$C_d = \frac{Q}{V_d} = \frac{Q}{V_0}\frac{V_0}{V_d}$$

Onde V_0 é a diferença de potencial do capacitor C_0. Mas sabemos que $\frac{Q}{V_0} = C_0$. Então, temos

$$C_d = C_0\frac{V_0}{V_d}$$

Usando aqui o que acabamos de descobrir sobre a capacitância, ie,

$$C_d = KC_0$$

Temos que

$$KC_0 = C_0\frac{V_0}{V_d} \longrightarrow \frac{V_0}{V_d} = K$$

Isto é, a diferença de potencial *diminui* pelo mesmo fator K quando preenchemos o capacitor com um dieétrico.

Toda essa discussão que fizemos é válida porque o capacitor está isolado do meio externo e as cargas estão fixas nas placas. Mas o que aconteceria se fixássemos o *potencial* ao invés das cargas como antes? As capacitâncias C_0 e C_d são as mesmas que antes, pois como vimos, só dependem de fatores geométricos e da permissividade do meio ϵ_0 e ϵ. Portanto continua sendo verdade que a capacitância, na presença do dielétrico, vai aumentar da mesma forma

$$C_d = KC_0$$

Agora, dado que o potencial é fixo, podemos nos perguntar o que acontece com as cargas. Para descobrir isto escrevemos

$$C_0 = \frac{Q}{V}$$

$$C_d = \frac{Q_d}{V} = \frac{Q_d}{Q}\frac{Q}{V} = \frac{Q_d}{Q}C_0$$

Portanto, uma vez que $C_d = KC_0$, teremos

$$\frac{Q_d}{Q} = K$$

ie a carga acumulada no capacitor vai também aumentar por um fator igual à constante dielétrica.

2) Vamos considerar agora o caso de duas esferas concêntricas e condutoras de raios R_a e R_b (R_a ¡ R_b) com cargas $+Q$ e $-Q$ respectivamente. Qual a capacitância desse capacitor esférico?

Como a capacitância é, por definição dada por

$$C = \frac{|Q|}{|\Delta V|}$$

Precisamos calcular, antes de mais nada, o campo elétrico existente entre essas placas, para depois obter ΔV. A melhor forma de obter o campo elétricoem casos assim simétricos é usar a lei de Gauss.

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

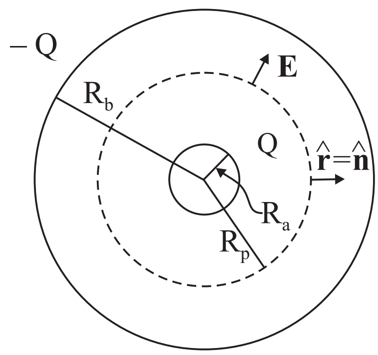

Figura 5.3: Capacitor esférico de placas paralelas

As cargas estão nas superfícies dos condutores e portanto o campo elétrico para $R < R_a$ é nulo. Entre os capacitores há um campo elétrico orientado como na figura, radialmente. Pela lei de Gauss temos

$$\oint \mathbf{En} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

O campo elétrico é constante sobre a superfície de Gauss, e portanto

$$E \oint dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \longrightarrow E 4\pi R_P^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_P^2}\mathbf{r}$$

$$\Delta V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{R_a}^{R_b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

$$|\Delta V| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{\mathbf{r} \cdot dR_P \mathbf{r}}{R_P^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_b - R_a}{R_a R_b}$$

E, consequentemente

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_b - R_a}{R_a R_b}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_a R_b}{R_b - R_a}$$

Outra vez notamos o aparecimento de qunatidades envolvidascom a geometria do problema e a constante dielétrica em questão, no caso o vácuo.

Quando $R_b >> R_a$, podemos obter uma expressão mais simples para a capacitância e que pode ser útil eventualmente. A expressão para a capacitância, como está escrita, não é adequada para fazer esse limite. Uma regra geral para efetuar aproximações em física é antes de mais nada, descobrir qual o *parâmetro* que é pequeno e escrever a expressão em termos desse parâmetro. Depois disso, faz-se uma expansão em torno do valor zero para o parâmetro. Esse parâmetro é em geral adimensional, dado que freqüentemente é expresso como uma *razão* entre duas grandezas físicas F_1 e F_2, sendo que $\frac{F_1}{F_2} << 1$ ou vice versa. No nosso caso essa grandeza física é o *raio*. Então nosso parâmetro "pequeno" será $\frac{R_a}{R_b}$.

Vamos agora reescrever a expressão para C em termos desse parâmetro

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_a R_b}{R_b - R_a} = \frac{\frac{4\pi\epsilon_0 R_a R_b}{R_b}}{\frac{R_b - R_a}{R_b}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_a}{1 - \frac{R_a}{R_b}}$$

Na expressão acima vê-se claramente que quando nosso parâmetro tende a zero

$$C_{R_B \to \infty} = 4\pi\epsilon_0 R_a$$

Tente fazer agora, seguindo os mesmos passos, o problema análogo para um capacitor feito de dois cabos coaxiais de comprimento L, de raios R_a e R_b ($R_a < R_b$), e cargas Q (em R_0) e $-Q$ (em R_b). A solução desse problema é $C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln R_2/R_1}$. O que acontece no limite $R_2 >> R_1$ neste caso?

5.4.1 Associação de Capacitores:

Quando falamos em circuitos elétricos, os capacitores são certamente dispositivos importantes nos mesmos. Além disso, é frequentemente útil construir circuitos com capacitores ligados entre si. É por isso importante saber qual a capacitância equivalente dessa associação. Existem essencialmente duas maneiras de conectar capacitores: em série ou em paralelo. No primeiro caso,

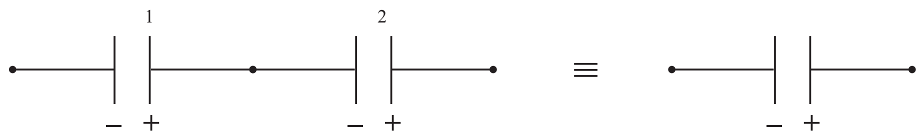

Figura 5.4: Associação em série de capacitores

uma das placas é conectada, por meio de fios condutores à placa (com carga oposta à do primeiro) de um outro capacitor. Isso forma uma *ligação em série.*

Podemos calcular a capacitância equivalente a esses dois capacitores $C-1$ e $C-2$ ligados como mostra a figura.

A diferença de potencial entre as placas do primeiro capacitor é

$$\Delta V_1 = V_y - V_x$$

e para o segundo

$$\Delta V_2 = V_z - V_y$$

A diferença de potencial entre z e x é

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = V_z - V_x$$

Assim, aprendemos que para capacitores em série, a diferença de potencial entre os pontos z e a é dada pela soma das diferenças do potencial em cada capacitor. Portanto o capacitor equivalente deve estar submetido a essa diferença de potencial.

O que acontece com as cargas? Não é difícil ver que, em módulo, as cargas em todas as placas deve ser a mesma. Se não fosse assim, o campo produzido pelas placas externas não seria completamente anulado pelos campos produzidos pelas placas internas e haveria campo elétrico na região que liga os dois capacitores.

Como calcular a capacitância equivalente? Usamos a idéia acima, ie, que o capacitor equivalente deve ter a mesma carga Q que os capacitores em série, Q. Portanto

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

Portanto, a capacitância equivalente obedece a equação

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

e portanto *menor* do que a capacitânciados capacitores individuais.

E os capacitores em paralelo? Quanto vale a capacitância equivalente?

No caso anterior vimos que capacitores em série tem uma coisa em comum que é a carga Q. Os capacitores em paralelo tem em comum a *diferença de potencial.*

$$C_1 = \frac{Q_1}{\Delta V_{xz}} \qquad e \qquad C_2 = \frac{Q_2}{\Delta V_{xz}}$$

A carga total nas placas dos capacitores é a soma das cargas nos capacitores individuais

$$Q = Q_1 + Q_2$$

E essa é a carga do capacitor equivalente

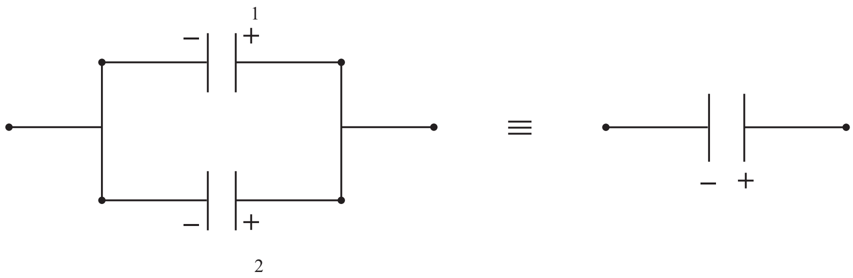

Figura 5.5: Associação em paralelo de capacitores

$$C = \frac{Q}{\Delta V_{xz}} = \frac{C_1 \Delta V_{xz} + C_2 \Delta V_{xz}}{\Delta V_{xz}}$$

Ou seja

$$C = C_1 + C_2$$

E a capacitância do capacitor equivalente é sempre maior do que as capacitâncias individuais.

5) Calcule a capacitância equivalente entre os pontos A e B do circuito mostrado na figura abaixo nas seguintes condições

a) A chave S está aberta

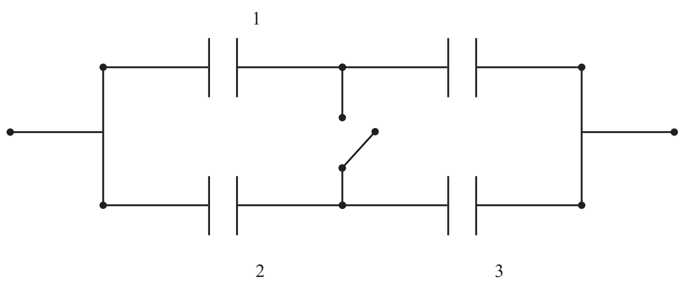

Figura 5.6: Associação de capacitores

Nos exercícios envolvendo vários capacitores a primeira coisa a fazer é identificar quais estão ligados em série e quais estão ligados em paralelo. No caso acima, com a chave S aberta, vemos imediatamente que C_1 e C_4 estão em série e C_2 e C_3 também estão em série. Os capacitores equivalentes a C_1 e C_4 e a C_2 e C_3 estarão em paralelo. Então, primeiro precisamos das capacitâncias equivalentes dos capacitores em série

$$\frac{1}{C_{1,4}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_4} \quad e \quad \frac{1}{C_{2,3}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

O que nos leva indiretamente a

$$C_{1,4} = \frac{C_1 C_4}{C_1 + C_4} \quad e \quad C_{2,3} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$$

Agora esses novos dois capacitores $C_{1,4}$ e $C_{2,3}$ devem ser associados em paralelo. Portanto a capacitância final resultante é dada por

$$C = C_{1,4} + C_{2,3} = \frac{C_1 C_4}{C_1 + C_4} + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$$

Note que se todos os capacitores tiverem a mesma capacitância $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C'$, teremos

$$C = \frac{C'^2}{2C'} + \frac{C'^2}{2C'} = C'$$

Fazer limites simples para testar a resposta a qual chegamos é sempre uma boa tática para achar erros de conta. Se houver algum erro de conta, em boa parte das vezes, ele pode ser detectado fazendo-se um limite conhecido.

b) A chave S está fechada.

O que muda quando fechamos a chave S? A diferença de potencial entre C e D será a mesma, nessas condições. Isto implica imediatamente que o conjunto (C_1 , C_2) estará em paralelo, assim como o conjunto (C_3 , C_4). Os respectivos capacitores equivalentes estarão em série uma vez que a diferença de potencial entre eles deve ser a soma das diferenças de potencial dos capacitores equivalentes.

Calculemos então, primeiro a capacitância equivalente entre C_1 e C_2 e entre C_3 e C_4

$$C_{1,2} = C_1 + C_2 \qquad e \qquad C_{3,4} = C_3 + C_4$$

E pelo raciocínio acima

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{1,2}} + \frac{1}{C_{3,4}} = \frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3 + C_4}$$

Após um pouco de álgebra simples obtemos

$$C = \frac{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}{(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)}$$

Note que, outro vez, o limite de todos os capacitores iguais (e iguais a C') nos fornece

$$C = C'$$

6) Considere o capacitor semipreenchido por um dielétrico mostrado na figura

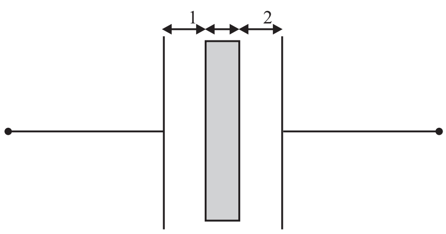

Figura 5.7: Capacitor semipreenchido por dielétrico

A área do capacitor plano é A, a distância entre as placas é $L = d_1 + D + d_2$ e a espessura do dielétrico é D. O resto do volume do capacitor é ocupado pelo ar. Qual é a capacitância desse capacitor?

Podemos pensar no capacitor resultante como sendo composto por uma associa c cão em série de três capacitores. O primeiro que envolve a distância d_1 e tem ar entre as placas tem capacitância

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{d_1}$$

O segundo, formado pelo dielétrico,

$$C_2 = \frac{\epsilon A}{D}$$

E o terceiro correspondente a um capacitor com ar entre as placas, cuja distância é d_2

$$C_3 = \frac{\epsilon_0 A}{d_2}$$

A capacitância resultante é

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{d_1 + d_2}{\epsilon_0 A} + \frac{D}{\epsilon A}$$

Podemos ainda introduzir a distância $L = d_1 + D + d_2$ da seguinte forma

$$\frac{1}{C} = \frac{L - D}{\epsilon_0 A} + \frac{D}{\epsilon A} = \frac{\epsilon(L - D) + \epsilon_0 D}{\epsilon \epsilon_0 A}$$

E, portanto

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 A}{\epsilon(L - D) + \epsilon_0 D} = \frac{\epsilon A}{K(L - D) + D}$$

Onde usamos $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = K$.

Um aspecto interessante da expressão acima é que aprendemos que a capacitância resultante NÃO DEPENDE da posição do dielétrico entre as placas (d_1 e d_2), mas apenas da sua *espessura*.

Será que isto está certo? Podemos fazer um limite que conhecemos bem, que é fazer $D \longrightarrow 0$, ou seja, preencher o espaço interior completamente por ar. Neste caso, podemos fazer diretamente $D \longrightarrow 0$ na expressão acima. Teremos

$$C \longrightarrow \frac{\epsilon A}{KL} = \frac{\epsilon_0 A}{L} \qquad (D \longrightarrow 0)$$

(Como deveria ser!)

Podemos também testar o caso em que o capacitor está completamente preenchido pelo dielétrico, i.e, $D \longrightarrow L$. Esta expressão também conhecemos bem. Então

$$C = \frac{\epsilon A}{K(L - D) + L} \longrightarrow \frac{\epsilon A}{L} \qquad (D \longrightarrow L)$$

(Como esperávamos!)

7) Calcular a capacitância equivalente do conjunto apresentado na figura 5.8.

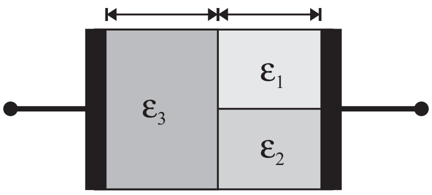

Figura 5.8: Capacitor com dielétricos

A área correspondente ao dielétrico ϵ_3 é A. A correspondente ao dielétrico ϵ_1 é a.

Discuta os seguintes limites

a) $a \longrightarrow 0$

b) $a \longrightarrow A$

c) $\epsilon_1 \longrightarrow \epsilon_2$

d) $\epsilon_1 \longrightarrow \epsilon_3$

e) $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon$

Como é o arranjo dos capacitores como os quais estamos lidando? O capacitor C_3 (correspondente a ϵ_3) está em série com o capacitor resultante da combinação em paralelo de C_3 e C_1 (correspondentes a ϵ_2 e ϵ_1, respectivamente).

Vamos, neste caso deixar a álgebra para você e escrever a resposta

$$C = \frac{\epsilon_3 A[\epsilon_1 a + \epsilon_2(A-a)]}{d[\epsilon_1 a + \epsilon_2(A-a)] + \epsilon_3 AD}$$

Esta expressão é uma função complicada dos parâmetros do problema, até porque eles são muitos. Essa é a desvantagem. A vantagem é que temos também vários limites para testar a expressão. Vamos lá

a) $a \longrightarrow 0$

$$C \longrightarrow \frac{\epsilon_3 A \epsilon_2 A}{d[\epsilon_2 A] + \epsilon_3 A D} = \frac{\epsilon_3 \epsilon_2 A}{d\epsilon_2 + \epsilon_3 D}$$

Isto deve ser igual à capacitância em série de C_3 e C_2. Vamos ver se é?

$$\frac{1}{C_{3,2}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_2} = \frac{d}{\epsilon_3 A} + \frac{D}{\epsilon_2 A} = \frac{d\epsilon_2 + \epsilon_3 D}{\epsilon_2 \epsilon_3 A}$$

Portanto

$$C_{3,2} = \frac{\epsilon_2 \epsilon_3 A}{d\epsilon_2 + \epsilon_3 D}$$

Confirmando que a resposta geral obtida está correta nesse limite.

b) $a \longrightarrow A$. (Este deixamos para você. É completamente análogo ao caso anterior).

c) $\epsilon_1 \longrightarrow \epsilon_2$. Neste caso, teremos dois capacitores em série C_3 e C_2. A fórmula geral nos fornece

$$(\epsilon_1 \longrightarrow \epsilon_2) \qquad C \longrightarrow \frac{\epsilon_3 A[\epsilon_2 A + \epsilon_2 (A - a)]}{d[\epsilon_2 a + \epsilon_2 (A - a)] + \epsilon_3 A D}$$

$$= \frac{\epsilon_3 \epsilon_2 A[2A - a]}{d\epsilon_2 [A] + \epsilon_3 A D} = \frac{\epsilon_3 \epsilon_2 (2A - a)}{d\epsilon_2 + \epsilon_3 D}$$

Estará correto? Para isso calculemos diretamente o caso ao qual o limite corresponda. O que significa $\epsilon_1 \longrightarrow \epsilon_2$? Significa que temos outra vez três capacitores, C_3 e os outros dois diferem apenas na *área*.

$$C_1 \longrightarrow C_2' = \frac{\epsilon_2 D}{a} \quad e \quad C_2 = \frac{\epsilon_2 D}{a}$$

Se você calcular a capacitância resultante desse conjunto, vai encontrar exatamente a expressão acima.

d) $\epsilon_1 \longrightarrow \epsilon_3$. É bem parecido com o caso anterior. Deixamos para você!

e) $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon$. A expressão geral nos fornece

$$C \longrightarrow \frac{\epsilon A[\epsilon a + \epsilon(A - a)]}{d[\epsilon a + \epsilon(A - a)] + \epsilon AD} = \frac{\epsilon^2 A[A]}{d\epsilon[A] + \epsilon AD} = \frac{\epsilon A}{d + A} = \frac{\epsilon A}{d + D} = \frac{\epsilon A}{L}$$

Como devia mesmo ser! Tudo indica que a expressão geral está correta.