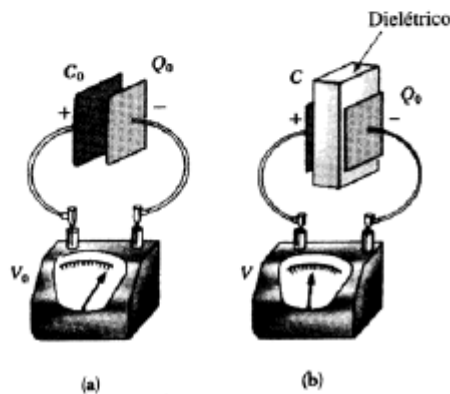


IV. Dielétricos

4.1 Polarização dos dielétricos. Noção do campo eléctrico na matéria

Os dielétricos (ou isoladores) são aqueles materiais que não podem conduzir corrente eléctrica, nem podem ser carregados por indução. Pelo contrário aos condutores, nestes materiais não há cargas livres que possam movimentar-se com facilidade. Mas os dielétricos também são constituídos pelas partículas carregadas (os electrões e os prótons). Um campo eléctrico (externo), na presença de um corpo isolador, também fica alterado, embora de maneira diferente do que se fosse um condutor.

Consideremos um condensador de placas paralelas, isolado e carregado com uma carga Q . Enchamos o espaço entre as placas com um material dielétrico, por exemplo, cêra. Se medirmos agora a d.d.p. entre as placas do condensador, vamos ver que ela diminui comparando com a situação sem cêra.



No entanto, a carga armazenada não altera, não há movimento de cargas através da camada de cêra. Então, o campo eléctrico no condensador diminuiu devido à presença da cêra. Introduzamos um parâmetro, chamado constante dielétrica, que descreve a atenuação do campo eléctrico na camada de cêra:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\varphi^{(Vácuo)}}{\Delta\varphi^{(Cêra)}} \quad (75)$$

Ou seja, a constante dielétrica de um material isolador diz quantas vezes mais fraco é o campo eléctrico neste material

comparando com o no vácuo. Como o campo eléctrico no condensador é homogêneo, podemos dizer que a constante ε determinada através da relação (75) é, de facto, um parâmetro do material (neste caso, da cêra) e não depende da geometria ou dos tamanhos do corpo isolador. Então, o campo eléctrico no material isolador é ε vezes mais fraco do que no vazio:

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \vec{E}_0 \quad (76)$$

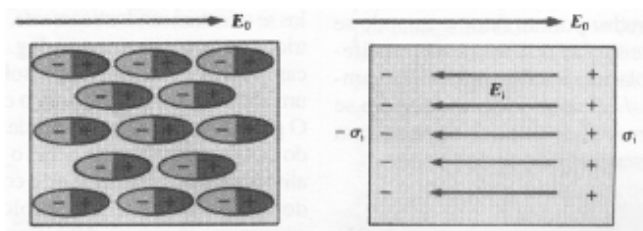
Porque?

É que, num campo eléctrico externo, o isolador fica polarizado, ou seja, aparece uma polarização induzida no material. Muitos materiais isoladores são constituídos pelos átomos (ou pelas moléculas) que têm um momento dipolar não nulo. Como sabemos da secção (2.2), um dipolo tem tendência de alinhar-se com o campo eléctrico externo, porque é nesta posição que tem a menor energia:

$$\begin{aligned} U &= q[\varphi(\vec{R} + \vec{l}) - \varphi(\vec{R})] \approx q(\vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{l}) \\ &= -q(\vec{l} \cdot \vec{E}) = -(\vec{p} \cdot \vec{E}) \end{aligned} \quad (77)$$

Então, a energia potencial do dipolo no campo externo, U , é menor para $\vec{p} \uparrow \uparrow \vec{E}$.

Os dipolos microscópicos (atômicos ou moleculares) num sólido ou líquido normalmente têm orientação aleatória devido ao movimento estocástico das partículas a $T \neq 0$. No entanto, na presença do campo eléctrico externo, os dipolos ficam orientados, de preferência, ao longo do campo. Esta ordem nunca é perfeita (só a



$T = 0$!), mas, mesmo assim, a matéria fica polarizada. O corpo transforma-se num grande dipolo eléctrico. Isto faz com que o campo eléctrico dentro do corpo fique mais fraco, apesar de não haver

nenhuma separação macroscópica das cargas (como acontece num condutor).

Definamos a polarização $\vec{P}$ de um corpo, que é uma grandeza vectorial que representa o momento dipolar eléctrico do corpo por unidade de volume. Se no corpo existem n partículas com dipolo eléctrico por unidade de volume,

$$\vec{P} = n \langle \vec{p} \rangle \quad (78)$$

onde $\langle \vec{p} \rangle$ significa o momento dipolar médio das partículas.

Polarização e a densidade de carga

Consideremos uma placa de um material dieléctrico, que está polarizado na presença de um campo eléctrico externo, perpendicular à superfície da placa. Se o material é uniforme, o vector polarização é igual em qualquer ponto da placa, ou seja, a placa está uniformemente polarizada. O momento dipolar total da placa é

$$\vec{P} = \vec{P} l S \quad (79)$$

onde S é a área da placa. Por outro lado, a polarização da placa faz com que os dipolos microscópicos se alinhem com o campo. Por isso, aparece alguma densidade de carga em cada superfície da placa (nas faces perpendiculares ao $\vec{E}$). O momento dipolar da placa pode ser calculado como

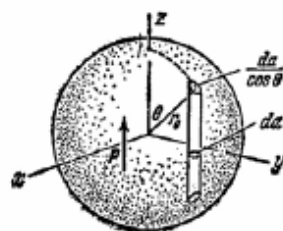
$$\vec{P} = \sigma \cdot l S \vec{n} \quad (80)$$

onde σ é a densidade superficial de carga e $\vec{n}$ é o vector normal à superfície.

Comparando as equações (79) e (80) vimos que

$$\sigma = \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{l S} = P_n \quad (81)$$

ou seja, a carga por unidade de área sobre a superfície de um corpo polarizado é igual à componente da polarização na direcção normal à superfície do corpo. O resultado (81), embora obtido para uma placa, tem carácter geral. Por exemplo, para uma esfera dieléctrica polarizada, também podemos facilmente mostrar isto.



Dividamos a esfera em barras verticais (paralelas ao vector $\vec{P}$). Cada barra pode ser considerada como um dipolo linear e substituída por duas cargas pontuais, $\pm \sigma \times (\text{área da mancha na superfície, recortada pela barra})$, situadas nas extremidades da barra. Assim, teríamos um dipolo equivalente. Como é óbvio da figura,

$$\sigma \frac{da}{\cos \theta} l = P l \cdot da,$$

(da é a área da secção normal da barra). Então,

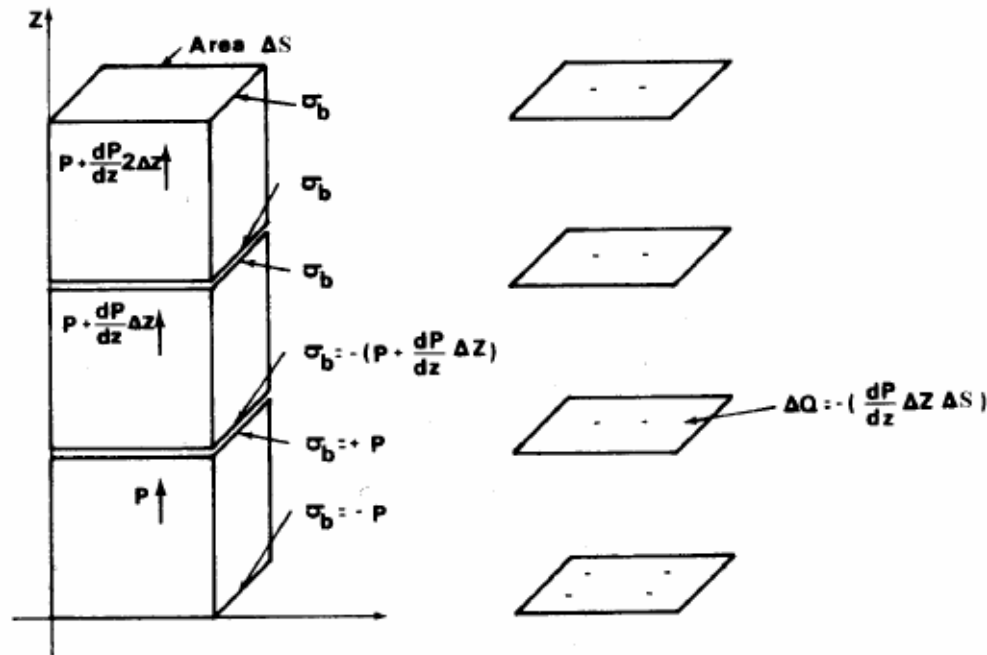
$$\sigma = P \cos \theta = P_n \quad (81a)$$

Uma esfera polarizada é equivalente a duas esferas sobrepostas, uma com carga positiva distribuída uniformemente no seu volume e outra com carga igual e negativa, também

distribuída uniformemente. As duas esferas são ligeiramente desviadas uma em relação a outra na direcção do vector $\vec{P}$.

Então, a polarização implica a existência de alguma carga na superfície do corpo isolador. Pelo contrário com um corpo condutor, estas cargas não são livres. Por exemplo, se ligarmos a esfera polarizada à terra, não vai acontecer nada. Para distinguir das cargas livres, vamos chamar a essas cargas de polarização.

As cargas de polarização podem surgir não só na superfície, mas também no interior de



um corpo isolador, se a polarização for não homogénea. Consideremos um dieléctrico em que $\vec{P} \parallel Z$ e o P varia em função de z .

Escolhemos um volume cúbico, elementar ($\Delta z \Delta S$) e consideremos, além deste, outros cubos elementares na sua vizinhança, como mostra o desenho. No cubo em cima a polarização é ligeiramente diferente,

$$P(z + \Delta z) = P(z) + \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_z \Delta z$$

Então, na fronteira entre os dois cubos, a densidade de carga positiva,

$$\sigma_+ = P(z)$$

não é totalmente anulada pela carga negativa:

$$\sigma_- = -P(z + \Delta z)$$

A carga resultante será:

$$\Delta Q = (\sigma_+ + \sigma_-) \Delta S = -\frac{\partial P}{\partial z} \Delta z \Delta S$$

No limite $\Delta z \rightarrow 0$, temos

$$dQ = -\frac{\partial P}{\partial z} dV.$$

Então,

$$\rho = \frac{dQ}{dV} = -\frac{\partial P}{\partial z} \quad (82)$$

é a densidade da carga de polarização. No caso geral, o vector $\vec{P}$ pode variar não só na direcção Z, mas nas outras direcções também. Como é fácil de adivinhar (ver a dedução da fórmula (41)), o resultado geral será

$$\rho_{pol} = -\text{div}\vec{P}. \quad (83)$$

O índice “pol” relembra que esta densidade é da carga de polarização. Mas produz um campo eléctrico na mesma! O campo eléctrico criado pelas cargas de polarização é dado pela lei de Gauss (Eq.(41)):

$$\text{div}\vec{E}_{pol} = 4\pi k \rho_{pol} = -4\pi k \text{div}\vec{P}. \quad (84)$$

Este campo eléctrico é o campo médio produzido pelos dipolos microscópicos (ver Eq.(78))

$$\text{div}\vec{E}_{pol} = -4\pi k \text{div}(n < \vec{p} >) \quad (84a)$$

e chama-se macro-campo. É a soma dos campos individuais (ou micro-campos) produzidos pelos dipolos microscópicos num dieléctrico. Em princípio, é possível relacionar o macro-campo com os parâmetros dos dipolos microscópicos (ver. Sec. 9.13 no livro de E. M. Purcell “Electricity and Magnetism”).

4.2 O deslocamento eléctrico

O campo eléctrico na matéria é constituído por duas componentes, (1) o campo externo que polariza a matéria e (2) o campo de polarização. O campo “externo” até pode não ser externo, por exemplo, pode ser criado por uma carga pontual embutida no corpo dieléctrico. O essencial é que não é criado pelas cargas de polarização. Costuma-se dizer que é criado por cargas livres. Então, o campo total na matéria é:

$$\vec{E} = \vec{E}_{livre} + \vec{E}_{pol} \quad (85)$$

onde

$$\text{div}\vec{E}_{livre} = 4\pi k \rho_{livre} \quad (86)$$

é o campo criado pelas cargas livres. O campo de polarização, $\vec{E}_{pol}$, é dado pela Eq.(84). Combinando as Eqs.(84)-(86), temos:

$$\text{div}\vec{E} = 4\pi k (\rho_{pol} + \rho_{livre}) \quad (87)$$

$$\text{div}(\vec{E} + 4\pi k \vec{P}) = 4\pi k \rho_{livre} \quad (88)$$

Como se vê da Eq.(88), o vector $(\vec{E} + 4\pi k \vec{P})$ é determinado exclusivamente pelas cargas livres. Vamos introduzir uma grandeza nova, chamada deslocamento eléctrico, que é definido de maneira ligeiramente diferente nos sistemas CGS e SI:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi k \vec{P} \quad (k=1) \text{ (CGS)} \quad (89a)$$

$$\vec{D} = \frac{1}{4\pi k} (\vec{E} + 4\pi k \vec{P}) = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}) \text{ (S.I.)} \quad (89b)$$

O deslocamento eléctrico, de acordo com a Eq.(88), é determinado pelas cargas livres e obedece à equação

$$\text{div}\vec{D} = 4\pi \rho_{livre} \quad (\text{CGS}) \quad (90a)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{ivre}} \quad (\text{S.I.}) \quad (90b)$$

No sistema CGS, a dimensão do $\vec{D}$ coincide com a da intensidade de campo eléctrico.

No S.I. as unidades (e as dimensões) do $\vec{D}$ e da $\vec{E}$ são diferentes: $\frac{C}{m^2}$ para o D e $\frac{V}{m}$

para o E . No vácuo, $\vec{D} = \vec{E}$ no sistema CGS e $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ no S.I.

As equações (90) podem ser interpretadas como a lei de Gauss na matéria. Estão escritas na forma diferencial. Podemos escreve-las na forma integral, análoga a Eq.(33). Integrando no volume encerrado por uma superfície fechada, temos

$$\int \text{div} \vec{D} dV = \begin{cases} 4\pi \int \rho_{\text{ivre}} dV \\ \int \rho_{\text{ivre}} dV \end{cases}$$

Como sabemos, o integral volúmico da divergência dum vector é igual ao fluxo do vector através da superfície fechada que encerra o volume da integração,

$$\oint_{\text{na superfície}} \vec{D} d\vec{S} = \begin{cases} 4\pi Q_{\text{ivre}} [\text{CGS}] \\ Q_{\text{ivre}} [\text{S.I.}] \end{cases} \quad (91)$$

Então, de acordo com a Eq.(91), o fluxo do vector deslocamento através de uma superfície fechada é igual a carga livre encerrada pela superfície (no CGS ainda existe o factor 4π). De alguma forma, o vector $\vec{D}$ desempenha o papel do vector $\vec{E}$ na matéria. O vector deslocamento na matéria pode ser calculado através da lei da Gauss (Eq.(90) ou (91)). Como é que podemos depois, a partir do campo $\vec{D}$, chegar a intensidade do campo eléctrico $\vec{E}$? A polarização dos dieléctricos deve-se à presença de algum campo eléctrico (se fosse $\vec{E} = 0$, seria também $\vec{P} = 0$). Então, é natural admitir que, pelo menos nos campos eléctricos não muito fortes, $\vec{E} \propto \vec{P}$. O coeficiente de proporcionalidade na relação linear entre o $\vec{P}$ e o $\vec{E}$ chama-se susceptibilidade eléctrica do material. A sua definição é ligeiramente diferente nos dois sistemas de unidades:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \chi_e \vec{E} & (\text{C.G.S.}) \\ \vec{P} &= \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} & (\text{S.I.}) \end{aligned} \quad (92)$$

Repare-se que a susceptibilidade, em ambos os sistemas, é uma grandeza adimensional. Combinemos a Eq. (92) com a (89). Teremos:

$$\vec{D} = (1 + 4\pi\chi_e) \vec{E} \quad (\text{C.G.S.}) \quad (93a)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \quad (\text{S.I.}) \quad (93b)$$

Então, existe relação linear entre os campos $\vec{D}$ e $\vec{E}$,

$$\vec{D} = \kappa \vec{E} \quad (94)$$

onde κ chama-se permitividade eléctrica:

$$\kappa = 1 + 4\pi\chi_e \quad (\text{C.G.S.}) \quad (95a)$$

$$\kappa = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \quad (\text{S.I.}) \quad (95b)$$

Como a permissividade eléctrica tem dimensão diferente nos dois sistemas de unidades, é preferível utilizar o termo “constante dieléctrica”, que coincide com o κ no CGS e é κ/ϵ_0 no SI, sempre adimensional. É aquela constante ϵ que introduzimos na Sec.4.1. Os valores da constante dieléctrica para alguns materiais estão na tabela a seguir, bem como os da rigidez eléctrica. Este último parâmetro representa o maior campo eléctrico possível que o dieléctrico pode aguentar sem ruptura (normalmente a ruptura ocorre através da ionização do material).

Tabela I.

Substância	Constante dieléctrica	Rigidez dieléctrica $E_{\text{máx}}/\text{kV} \cdot \text{mm}^{-1}$
Água (20° C)	80	—
Ar	1,000 59	3
Baquelite	4,9	24
Óleo de transformador	2,24	12
Papel	3,7	16
Acrílico	3,4	40
Vidro pirex	5,6	14
Porcelana	7	5,7
Poliestireno	2,55	24
Parafina	2,1-2,5	10

Condições de fronteira para os campos $\vec{D}$ e $\vec{E}$

Consideremos a superfície de um corpo dieléctrico. Nesta superfície há cargas de polarização ($\rho_{\text{pol}} \neq 0$) mas não há cargas livres. Escolhemos uma superfície (por exemplo, um cilindro), que encerra um volume do vácuo e um volume do dieléctrico, como mostra o desenho, e apliquemos a lei de Gauss para o vector $\vec{D}$ (Eq.(91)). Obtemos:

$$D_n^{(\text{vácuo})}S - D_n^{(\text{dieléctrico})}S = 0$$

onde D_n significa componente normal

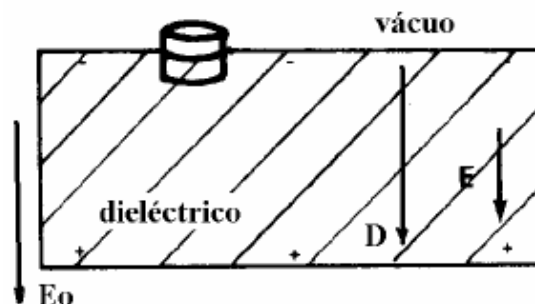
do vector $\vec{D}$ e S é a área das bases do cilindro. (O fluxo através das faces laterais é nulo.) Então,

$$D_n^{(\text{vácuo})} (= E_0) = D_n^{(\text{dieléctrico})} \quad (96)$$

ou seja, a componente normal do vector deslocamento é contínua na fronteira entre um meio dieléctrico e o vácuo (ou entre dois dieléctricos).

Com o auxílio da Eq.(94), podemos escrever a condição de fronteira para o vector $\vec{E}$:

$$\kappa E_n^{(\text{dieléctrico})} = \epsilon_0 E_n^{(\text{vácuo})} \quad (\text{S.I.})$$



$$kE_n^{(\text{dielétrico})} = E_n^{(\text{vácuo})} \quad (\text{C.G.S}) \quad (97)$$

ou seja, a componente normal do vector $\vec{E}$ tem uma descontinuidade na fronteira entre um dielétrico e o vácuo (ou entre dois dielétricos). O campo E é κ vezes mais fraco no dielétrico ($\epsilon = \left(\frac{\kappa}{\epsilon_0}\right)$ vezes no S.I.).

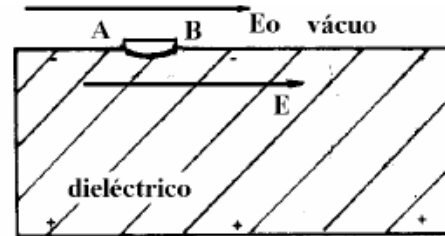
Porque é que a componente normal do vector $\vec{D}$ é contínua na superfície e a do vector $\vec{E}$ é descontinua? O deslocamento eléctrico é determinado apenas pela distribuição de cargas livres. Como não há cargas livres na superfície do dielétrico, a componente D_n é contínua. Pelo contrário, o $\vec{E}$ é determinado pela distribuição de todas as cargas. Na superfície do dielétrico há carga de polarização ($\sigma_{pol} = P_n$), portanto, a E_n é descontinua.

Consideremos agora as componentes tangenciais.

Admitimos agora que o campo eléctrico é tangente à superfície do dielétrico. Escolhemos dois pontos na superfície, A e B . Como sabemos da Sec.2.5, a d.d.p. entre estes pontos pode ser calculada como o integral ao longo de qualquer percurso que une estes pontos,

$$\Delta\phi = -\int_A^B \vec{E} d\vec{l}.$$

Podemos escolher um percurso dentro do vácuo e outro dentro do dielétrico, no entanto, muito próximos à superfície e entre si. O resultado vai ser igual para os dois. Então, chegamos a conclusão que a componente tangencial do campo eléctrico é contínua na superfície.



$$E_t^{(\text{dielétrico})} = E_t^{(\text{vácuo})} \quad (98)$$

4.3. Condensadores com dielétricos

Como vimos na Sec.4.1, se enchermos o espaço entre as placas de um condensador com um dielétrico, o campo eléctrico dentro do condensador fica ϵ vezes mais fraco. Então, a diferença de potencial entre as placas fica ϵ vezes menor para a mesma carga nas placas (Eq. (75)). Consequentemente, a capacidade do condensador aumenta ϵ vezes. Levando isto em conta, a fórmula (69) fica:

$$C = \frac{\epsilon S}{k4\pi d} \quad (99)$$

para um condensador de placas paralelas com um dielétrico por dentro, que ocupa todo o espaço entre as placas. Os condensadores que se usam na prática, sempre têm dielétrico por dentro. Quanto maior ϵ , melhor em termos do armazenamento de carga eléctrica. O outro parâmetro importante é a rigidez dieléctrica, que é a intensidade máxima do campo que o dielétrico pode aguentar sem acontecer uma descarga por ionização.

Comparemos dois condensadores, um com dieléctrico e o outro sem dieléctrico entre as placas. Se a diferença de potencial for igual para os dois ($\Delta\varphi$), o condensador com dieléctrico terá maior carga,

$$Q_1 = \varepsilon Q_2$$

e maior energia (ver Eq. (73))

$$U_1 = \varepsilon U_2,$$

mas a intensidade do campo eléctrico será igual para os dois:

$$E_1 = E_2 = \frac{\Delta\varphi}{d}$$

(onde d é a distância entre as placas).

Como sabemos, a energia armazenada no condensador pode ser interpretada como a energia do campo eléctrico que existe entre as suas placas. Comparando as relações anteriores, chegamos a conclusão que a densidade de energia do campo eléctrico na matéria é ε vezes maior do que no vácuo. A partir da Eq.(74), podemos escrever:

$$\text{Densidade de energia} = \frac{\varepsilon}{8\pi k} E^2 = \begin{cases} \frac{D^2}{8\pi\varepsilon} & (\text{C.G.S.}) \\ \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} & (\text{S.I.}) \end{cases} \quad (100)$$

Esta densidade é maior na matéria do que no espaço livre, porque a polarização da matéria exige alguma energia adicional.