Capítulo 9

Indutância

9.1 Indutores e Indutância

Neste capítulo, estudamos os indutores e suas indutâncias, cujas propriedades decorrem diretamente da lei de indução de Faraday.

Capacitores: Recapitulação

Lembre-se que, no caso de um capacitor, a carga elétrica acumulada nas placas de um capacitor é proporcional à voltagem entre as placas: $q \propto V$. A *capacitância* C foi definida como a constante de proporcionalidade:

$$q = CV \tag{9.1}$$

ou $C = q/V$. Ou seja, entre as placas do capacitor, tem-se uma diferença de potencial V_C

$$V_C = \frac{q}{C} \tag{9.2}$$

Indutores

Como o capacitor, um indutor é um elemento de circuito, sob o qual existe uma certa voltagem. O exemplo típico é um solenóide, pelo qual passa uma corrente variável. Esta gera uma variação do fluxo magnético através do indutor, que induz uma voltagem induzida em suas extreminadas.

Em analogia ao tratamento dos capacitores, o fluxo magnético total em um indutor formado por N espiras é proporcional ao campo magnético, que por sua vez é proporcional à corrente elétrica nas espiras: $\Phi_B^{\mathrm{T}} \propto i$. A constante de proporcionalidade é a *indutância* L:

$$\Phi_B^{\mathrm{T}} = Li \tag{9.3}$$

ou $L = \Phi_B^{\mathrm{T}}/i$. Pela Lei de Faraday, a diferença de potencial no indutor é $V_L = -\partial\Phi_B^{\mathrm{T}}/\partial t$, i.e.

$$V_L = -L\frac{di}{dt} \tag{9.4}$$

A unidade de indutância é o Henry [H]=[T][m^2]/[A]=[V][s]/[A]

9.2 Indução Mútua

9.2.1 Solenóide

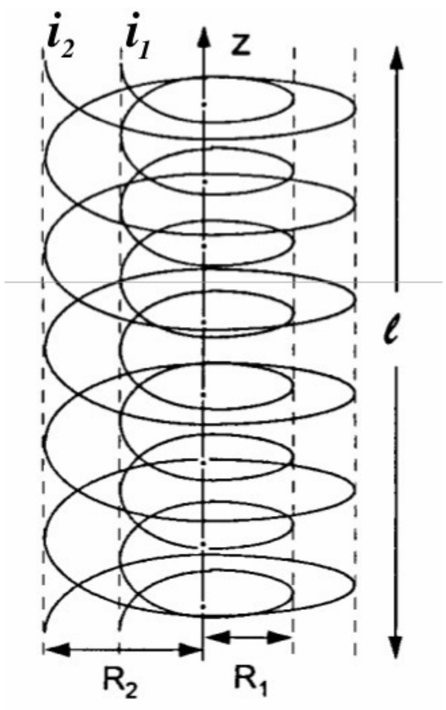

Figura 9.1: Indutância mútua de dois solenóides (Nussenzveig).

Considere dois solenóides concêntricos de raios R_1 e R_2, correntes i_1 e i_2 , N_1 e N_2 espiras, e comprimento l.

O campo criado pelo solenóide 1 é

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} i_1 \,, \quad (0 < r < R_1) \tag{9.5}$$

Portanto o fluxo magnético $\Phi_{2(1)}$ produzido sobre as N_2 espiras do solenóide 2 por B_1 fica

$$\begin{aligned} \Phi_{2(1)} &= N_2 \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2 = N_2 B_1 (\pi R_1^2) = N_2 (\mu_0 \frac{N_1}{l} i_1)(\pi R_1^2) \\ &= \mu_0 N_1 N_2 \frac{\pi R_1^2}{l} i_1 \end{aligned} \tag{9.6}$$

Portanto,

$$\Phi_{2(1)} = L_{12} i_1 \tag{9.7}$$

$$L_{21} = \mu_0 N_1 N_2 \frac{\pi R_1^2}{l} \tag{9.8}$$

e L_{21} é a *indutância mútua*. Similarmente,

$$B_2 = \mu_0 \frac{N_2}{l} i_2 \,, \quad (0 < r < R_2) \tag{9.9}$$

Portanto o fluxo magnético $\Phi_{1(2)}$ produzido sobre as N_1 espiras do solenóide 1 por B_2 fica

$$\Phi_{1(2)} = N_1 \int \vec{B}_2 d\vec{A}_1 = N_1 B_2 (\pi R_1^2) = \mu_0 N_1 N_2 \frac{\pi R_1^2}{l} i_2 \tag{9.10}$$

e temos

$$\Phi_{1(2)} = L_{12} i_2 \tag{9.11}$$

$$L_{12} = \mu_0 N_1 N_2 \frac{\pi R_1^2}{l} = L_{21} \tag{9.12}$$

9.3 Auto-indução

9.3.1 Solenóide

Se fizermos os dois solenóides coincidirem (i.e. $R_1 = R_2 = R$, etc.), ou se simplesmente considerarmos o fluxo de um solenóide sobre ele mesmo, temos

$$\Phi = \mu_0 N^2 \frac{\pi R^2}{l} i \tag{9.13}$$

Portanto a sua (auto) indutância fica

$$L = \mu_0 N^2 \frac{\pi R^2}{l} \tag{9.14}$$

Note que $L \propto N^2$, pois o fluxo em cada espira é proporcional a N, já que depende de todas as outras, e o fluxo total produz mais um N. Adiante, estaremos sempre nos referindo à auto-indutância, a qual chamaremos simplesmente de indutância.

9.3.2 Cabo Coaxial

Considere um cabo coaxial, como mostrado na Fig 9.2, formado por um fio condutor cilíndrico de raio a, envolvido por capa cilíndrica contutora de raio b. A corrente passa em um sentido no condutor interno, retornando no outro sentido pela capa externa.

O campo B tem linhas de campo circulares, como no circuito C. Pela Lei de Ampere

$$2\pi\rho B = \mu_0 i \quad \rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho}\hat{\varphi} \tag{9.15}$$

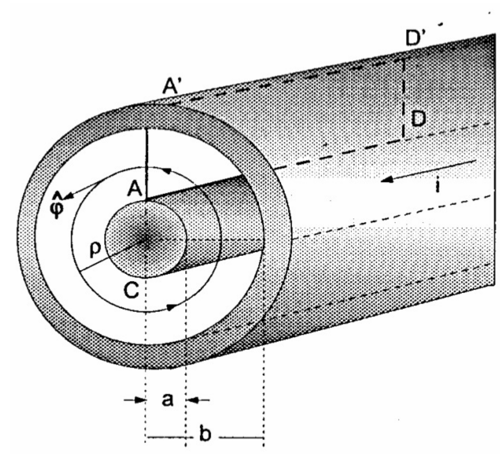

Figura 9.2: Indutância de um cabo coaxial (Nussenzveig).

Suponha que $a \ll b$ e o fluxo no fio interno pode ser desprezado. Considere o retângulo $ADD'A'$, onde $AD = l$. O fluxo neste retângulo fica

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = AD \int_a^b B(\rho) d\rho = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} \\ &= \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned} \tag{9.16}$$

Portanto, a indutância é dada por

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{9.17}$$

9.3.3 Toróide

Considere o toróide com N espiras circulares, mostrado nas Figs 7.10 e 9.3, com raio médio $= a$ e raio da seção circular $= b$.

O ponto P tem coordenadas (ρ, φ). A linha de campo que passa por P, é um círculo de raio $r = PP'$, onde

$$r = a - \rho\cos\varphi \tag{9.18}$$

A Lei de Ampere dá em P:

$$2\pi r B = N\mu_0 i \tag{9.19}$$

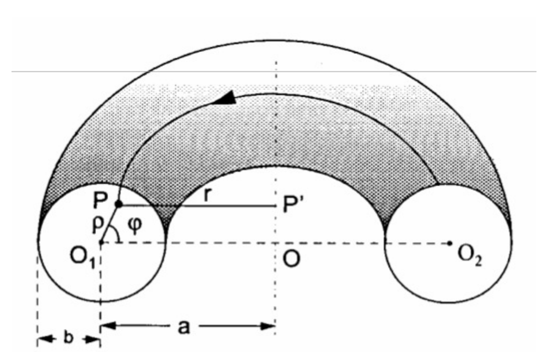

Figura 9.3: Indutância de um toróide (Nussenzveig).

ou seja

$$B(\rho,\phi) = \frac{N\mu_0 i}{2\pi}\frac{1}{a-\rho\cos\varphi} \tag{9.20}$$

Portanto o fluxo magnético Φ através das N espiras do toróide fica

$$\Phi = N\int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \frac{N^2\mu_0 i}{2\pi}\int_0^b \rho d\rho \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a-\rho\cos\varphi} \tag{9.21}$$

A segunda integral é dada por

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a-\rho\cos\varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-\rho^2}} \tag{9.22}$$

Portanto

$$\Phi = N^2\mu_0 i\int_0^b \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} = N^2\mu_0 i\left(-\sqrt{a^2-\rho^2}\right)_0^b = N^2\mu_0 i\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right) \tag{9.23}$$

e a indutância fica

$$L = N^2\mu_0\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right) \tag{9.24}$$

Para $b \ll a$, temos $L = N^2\mu_0 a(1-\sqrt{1-b^2/a^2}) \approx N^2\mu_0 a(b^2/2a^2) = N^2\mu_0(\pi b^2)/(2\pi a) = N^2\mu_0 A/(2\pi a)$, como seria obtido aproximando $B =$ const. em toda a seção circular do toróide.

9.4 Circuito RL

9.4.1 Corrente crescendo

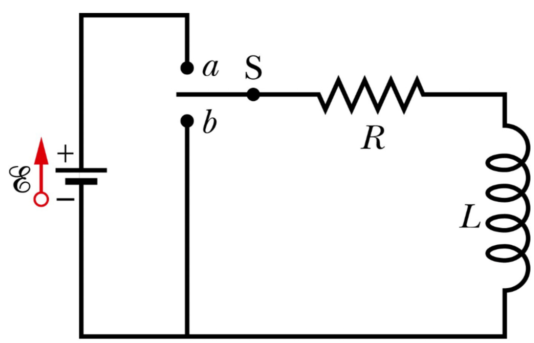

Figura 9.4: Circuito RL. (Halliday).

Considere um circuito RL conectado a uma bateria $\mathcal{E}$ (switch a) e com corrente *crescendo*:

$$\mathcal{E} - Ri - L\frac{di}{dt} = 0 \tag{9.25}$$

A solução para $i(t)$ pode ser obtida de maneira idêntica ao circuito RC:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{\mathcal{E}}{L} \tag{9.26}$$

Multiplicando por $e^{tR/L}$, temos:

$$\frac{d}{dt}\left(i(t)e^{tR/L}\right) = \frac{\mathcal{E}}{L}e^{tR/L} \tag{9.27}$$

Integrando

$$\begin{aligned} i(t)e^{tR/L} &= \int \frac{\mathcal{E}}{L}e^{tR/L}dt + K = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{tR/L} + K \\ \to i(t) &= \frac{\mathcal{E}}{R} + Ke^{-tR/L} \end{aligned} \tag{9.28}$$

Como $i(0) = 0$, temos

$$0 = i(0) = \frac{\mathcal{E}}{R} + K \to K = -\frac{\mathcal{E}}{R} \tag{9.29}$$

e a solução fica

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-tR/L}\right) \tag{9.30}$$

9.4.2 Corrente decrescendo

Suponha que agora a bateria seja desconectada do circuito RL (switch b). Temos

$$-Ri - L\frac{di}{dt} = 0 \tag{9.31}$$

Note que V_L tem o sentido oposto à variação de fluxo magnético, ou à variação da corrente no tempo. Como agora a corrente está decrescendo, V_L terá sentido oposto ao caso anterior. Mas isso já está garantido pela equação acima, pois agora $di/dt < 0$, que já produz o sentido correto. A solução para $i(t)$ fica:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \to i(t) = Ke^{-tR/L}$$

Como $i(0) = \mathcal{E}/L$, temos

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-tR/L} \tag{9.32}$$

9.5 Circuito LC

Para um circuito LC, temos

$$\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = 0 \quad \to \quad \frac{di}{dt} = \frac{q}{LC} \tag{9.33}$$

No sentido escolhido, o capacitor está descarregando e portanto temos $i = -dq/dt$. Derivando temos

$$\frac{d^2i}{dt^2} = -\frac{i}{LC} = -\omega_0^2 i \tag{9.34}$$

$$\text{onde} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{9.35}$$

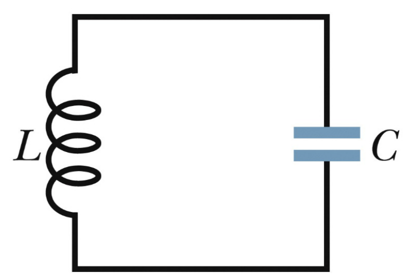

Figura 9.5: Circuito LC. (Halliday).

A solução fica

$$i(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{9.36}$$

e portanto a carga

$$q(t) = -\frac{A}{\omega_0}\sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{9.37}$$

Como não há dissipação de energia por resistores, as cargas e correntes ficam oscilando, transferindo energia do capacitor para o indutor e vice-versa.

9.6 Energia do Campo Magnético

Considere um circuito RL conectado a uma bateria $\mathcal{E}$ e com corrente *crescendo*:

$$\mathcal{E} - Ri - L\frac{di}{dt} = 0 \tag{9.38}$$

Multiplicando essa equação por i, temos

$$\mathcal{E}i = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} = 0 \tag{9.39}$$

O primeiro termo é a potência provida pela bateria e o segundo termo a potência dissipada pelo resistor. Portanto, o último termo é a potência armazenada no indutor:

$$\frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt} = \frac{L}{2}\frac{di^2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2}\right) \quad \rightarrow \quad U_B = \frac{Li^2}{2} \tag{9.40}$$

A densidade de energia magnética em um solenóide de comprimento l e área A fica então:

$$u_B = \frac{U_B}{\text{vol}} = \frac{Li^2/2}{Al} \tag{9.41}$$

Para o solenóide, $L = \mu_0 \frac{N^2}{l} A$ e $B = \mu_0 \frac{N}{l} i$

$$u_B = \frac{Li^2}{2Al} = \left(\mu_0 \frac{N^2}{l} A\right)\frac{i^2}{2Al} = \frac{\mu_0 N^2 i^2}{2l^2} = \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{9.42}$$

e podemos interpretar a energia como armazenada no *campo magnético*.

9.6.1 Exemplo: Cabo coaxial

Para o cabo coaxial, vimos que

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho}\hat{\varphi} \tag{9.43}$$

o que dá uma densidade de energia

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi\rho}\right)^2 = \frac{\mu_0}{8\pi^2}\frac{i^2}{\rho^2} \tag{9.44}$$

Portanto a energia total em um segmento de comprimento l do cabo fica

$$\begin{aligned} U_B &= \int u_B dV = \int_0^l dz \int_a^b \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \; u_B \\ &= \int_0^l dz \int_a^b \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \; \frac{\mu_0}{8\pi^2}\frac{i^2}{\rho^2} \quad = \quad \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2}(l2\pi)\int_a^b \frac{d\rho}{\rho} \\ &= \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad = \quad \frac{1}{2}\left[\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\left(\frac{a}{b}\right)\right] i^2 \\ &= \frac{1}{2}Li^2 \end{aligned} \tag{9.45}$$