Cap. 16 – Ondas I

Prof. Oscar 1º. Semestre de 2011

16.1 Introdução

Ondas são perturbações que se propagam transportando energia. Desta forma, uma música, a imagem numa tela de tv, a comunicações utilizando celulares, etc, dependem da produção, transmissão e recepção de uma onda. Este capítulo se concentra nas ondas progressivas ao longo de uma corda esticada, como a de um violão.

16.2 Tipos de Ondas

As ondas são de três tipos:

- ***Ondas mecânicas*** – Precisam de um meio para se propagar (ondas na água, ondas sonoras, ondas sísmicas, ondas numa corda).

- ***Ondas eletromagnéticas*** – Não requerem um meio material para se propagarem (luz visível, ultravioleta, ondas de rádio, televisão, raio x, radar, celular,etc.). No vácuo sua velocidade é **c=299.792.458 m/s.**

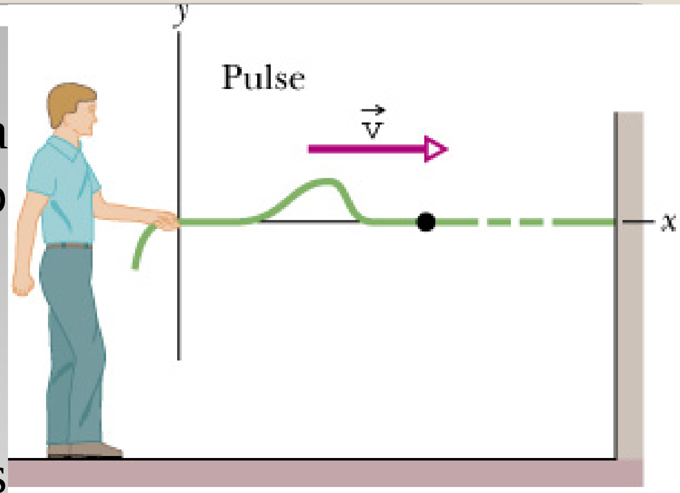
- ***Ondas de matéria*** – Associadas a elétrons, prótons e outras partículas elementares, e mesmo com átomos e moléculas.

16.3 Ondas Transversais e longitudinais

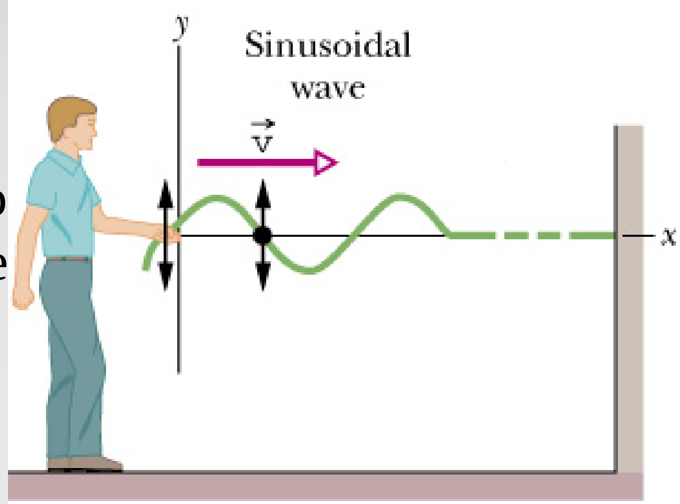
- ***Pulso*** – (a) cada ponto do meio (corda) vibra com a mesma amplitude, no sentido perpendicular ao deslocamento da onda.

- ***Trem de ondas*** – (b) sucessivos pulsos produzidos com periodicidade formam uma onda senoidal.

- ***Onda Transversal*** – cada elemento do meio oscila perpendicularmente à direção de propagação da onda.



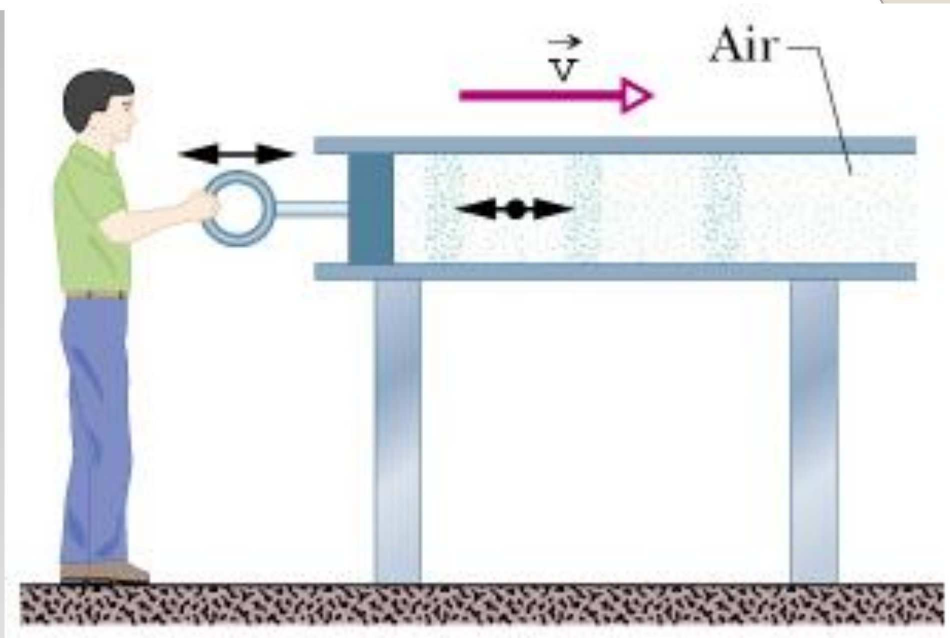
(a)



(b)

- ***Onda Longitudinal* -** os elementos do meio oscilam ma mesma direção de propagação da onda.

  O movimento de vai e vem do pistão resulta numa onda longitudinal que se propaga ao longo do tubo.



Tanto as ondas Transversais quanto as Longitudinais são chamadas de ondas progressivas.

16.4 Comprimento de Onda e Freqüência

Uma onda fica completamente descrita pela equação ao lado. Para uma corda, esta equação pode ser usada para encontrar os **deslocamentos** de todos os elementos da corda em função do tempo.

- ***Amplitude y_m*** – é o módulo do deslocamento máximo dos elementos a partir de suas posições de equilíbrio enquanto a onda passa através deles.

$$\overbrace{y(x,t)}^{\textit{Deslocamento}} = \overset{\textit{Amplitude}}{y_m}\ \overbrace{sen\overbrace{(\underset{\textit{Num. de onda}}{k}\ x-\omega t)}^{\textit{Fase}}}^{\textit{termo de oscilação}}$$

Fase (kx – wt) da onda é o argumento do seno da equação anterior. Enquanto a onda passa por um elemento da corda em uma posição particular *x*, a fase varia linearmente com o tempo *t*.

Comprimento de Onda λ é a distância entre repetições da forma da onda.

$$y(x,t) = y_m sen(kx - \omega t)$$

$$Em \quad t = 0, \quad x = x_1 \quad e \quad y(x,0) = y_m sen(kx_1)$$

$$Em \quad x = x_1 + \lambda,$$

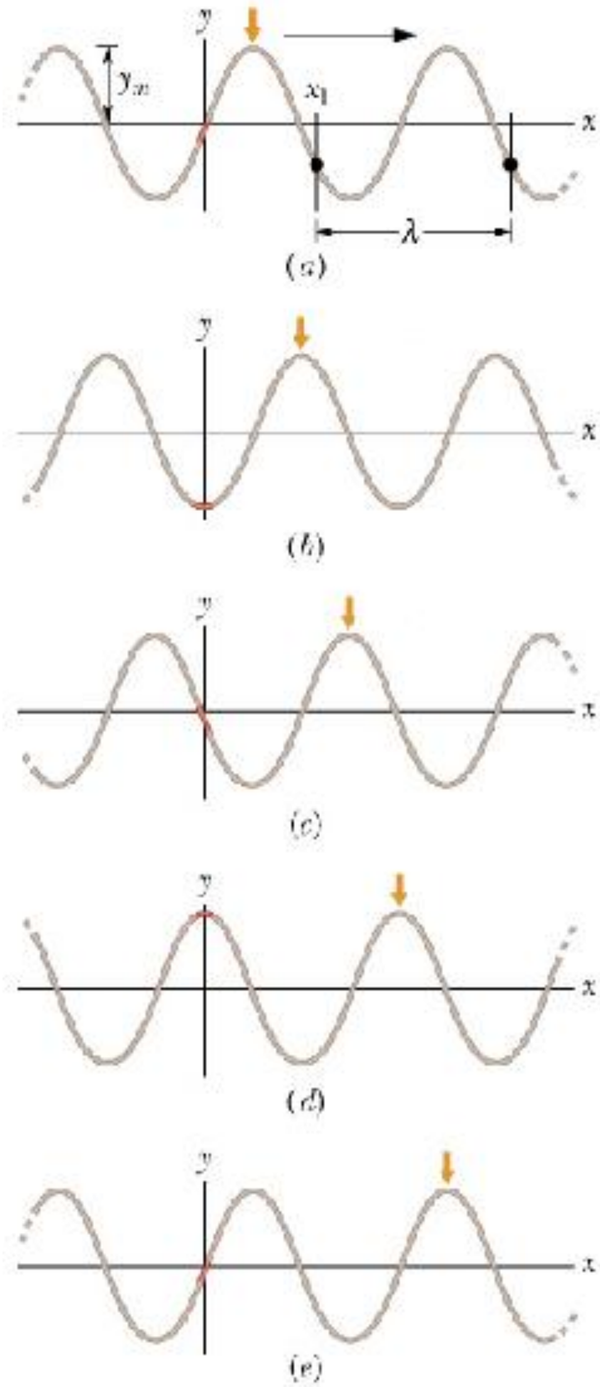
$$y_m sen(kx_1) = y_m sen(kx_1 + k\lambda)$$

$$Onde \quad k\lambda = 2\pi$$

Número de Onda *k*

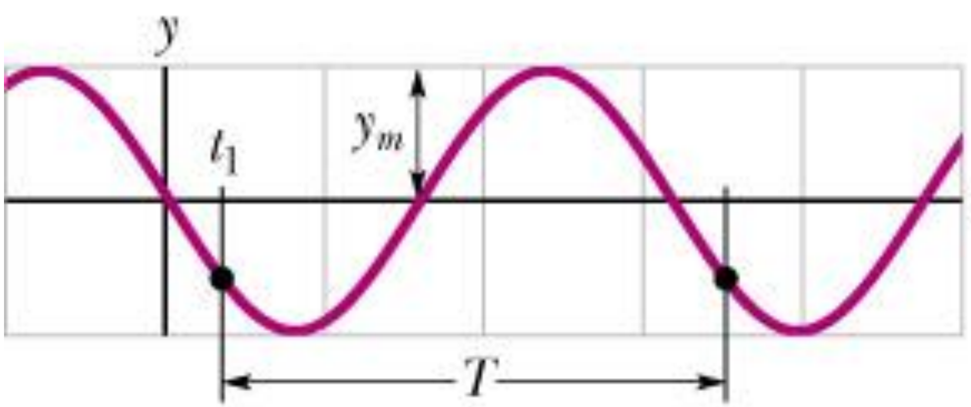
Unidade no SI é radiano por metro rad/m, dado por:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$



Período, Frequência Angular e Frequência

Período (T) de oscilação de uma onda é o tempo que qualquer elemento da corda leva para realizar uma oscilação completa.



Frequência Angular (w) é a rapidez com que o ponto realiza o ciclo, dada em radiano por segundo .

Frequência (f) de uma onda é o número de oscilações por unidade de tempo (1/s=Hz . Relaciona-se com o período e freqüência angular por:

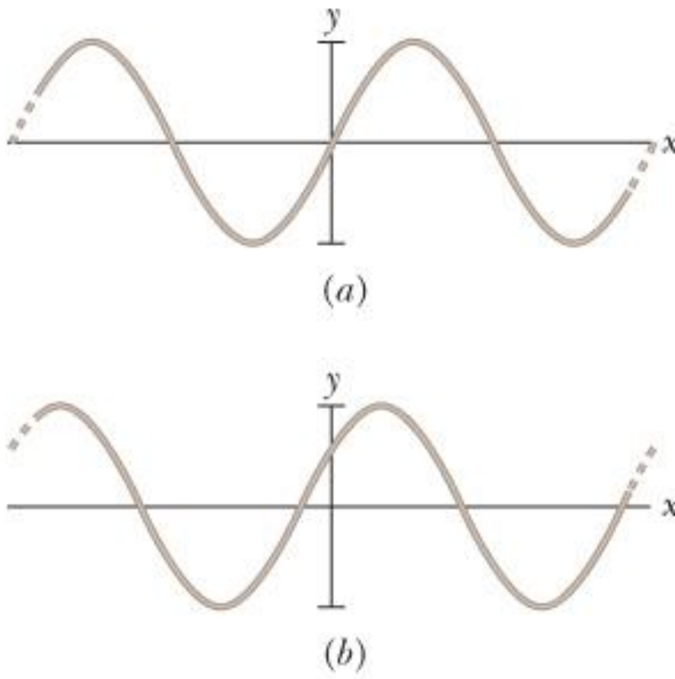
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Constante de Fase: Quando uma onda progressiva senoidal é expressa pela função de onda $y(x,t) = y_m sen(kx - \omega t)$, a forma da onda pode ser descrita conforme a figura (a). Note que x=0 , y=0 e sua inclinação é máxima positiva. Se inserirmos uma constante de fase, a função de onda assume a forma:

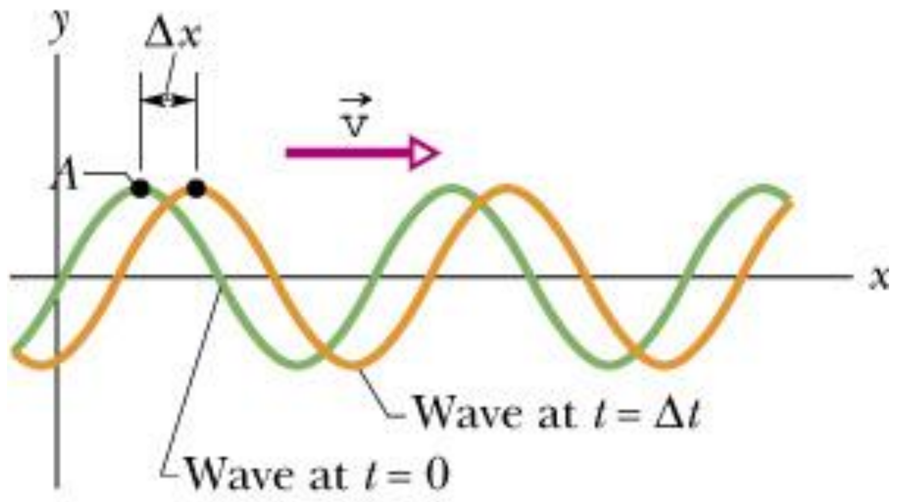
$$y(x,t) = y_m sen(kx - \omega t + \phi)$$

No caso da figura,

$$\phi = +\pi / 4$$



16.5 A Velocidade de uma Onda Progressiva



A figura ao lado mostra dois instantâneos da onda separados por um pequeno intervalo de tempo Δt. Desta forma, a razão ΔX/Δt ou no limite diferencial dx/dt é a velocidade da onda *v*. Se o ponto *A* preserva seu deslocamento enquanto ele se move, a fase na equação de onda determinando este deslocamento deve permanecer constante:

$$kx - \omega t = constante$$

Derivando este argumento em relação a *t*, encontramos a velocidade *v* da onda,

$$k\frac{dx}{dt} - \omega = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k}$$

Como já foi definido, $k = 2\pi/\lambda$ e $\omega = 2\pi/T$, podemos escrever a velocidade da onda como:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

Quando a onda se mover no sentido negativo de *x*, temos

$$kx + \omega t = constante$$

Desta forma a equação da onda será escrita por

$$y(x,t) = y_m sen(kx + \omega t)$$

que derivada, leva a

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{k}$$

Exemplo 1:

Uma onda propagando ao longo de uma corda é descrita por

$$y(x,t) = 0,00327 sen(72,1x - 2,72t)$$

, na qual as constantes numéricas estão em unidades do SI. **(a)** Qual é a amplitude desta onda? **(b)** quais são os comprimentos de onda, período e a freqüência desta onda? **(c)** Qual é a velocidade desta onda? **(d)** Qual o deslocamento *y* em *x=22,5cm e t=18,9s?* (0,00327m ; 0,0871m ; 2,31s ; 0,433Hz; 0,0377m/s; -0,00191m)

Exemplo 2:

No exemplo anterior letra d, mostramos que em t=18,9s o deslocamento transversal de y do elemento da corda situado em x=0,225 m provocado pela onda da equação do exercício anterior é 1,91 mm.

a) Qual é a velocidade transversal u desse elemento da corda nesse instante?
b) Qual a aceleração a_y do mesmo elemento nesse instante?

16.6 Velocidade da Onda em uma Corda Esticada

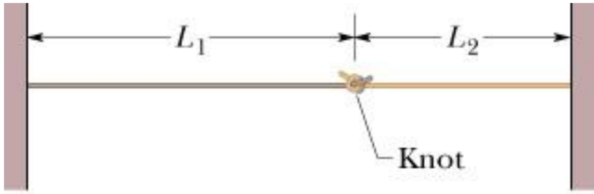
A velocidade da onda está relacionada com o comprimento de onda e com a freqüência pela equação $\boldsymbol{v=\lambda f}$, mas ela é determinada pela propriedades do meio como a densidade linear de massa μ e a tensão $\boldsymbol{\tau}$ da corda.

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

$$\mu = \frac{m}{l}$$ (massa por comprimento de corda).

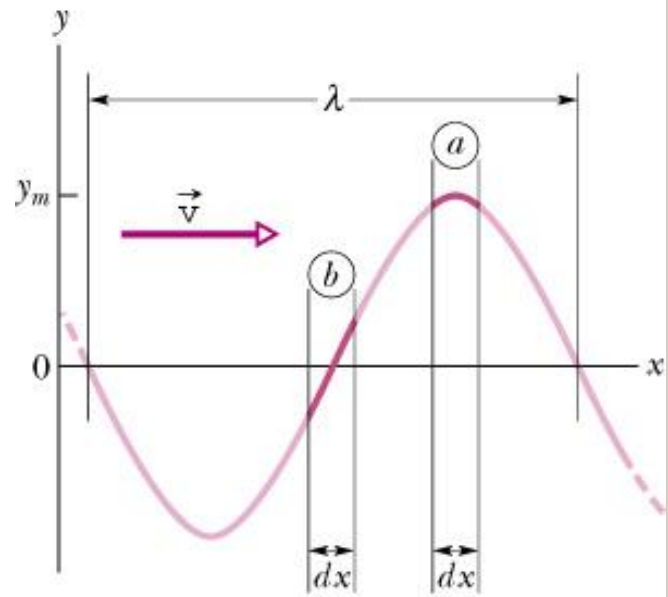
Exemplo 3:

Na figura, duas cordas foram amarradas uma na outra com um nó e depois esticadas entre dois suportes rígidos. As cordas têm densidades lineares $\mu_1 = 1{,}4x10^{-4}\,kg/m$ e $\mu_2 = 2{,}8x10^{-4}\,kg/m$. Seus comprimentos são L_1=3m e L_2=2m, e a corda 1 está submetida a uma tensão de 400N. Simultaneamente, um pulso é enviado a partir da extremidade do suporte rígido de cada corda em direção ao nó. Qual pulso alcançara o nó primeiro?
(determine o tempo que cada pulso leva para percorrer cada corda)



16.7 Energia e Potência de uma Onda Progressiva em uma Corda

Quando fornecemos energia para uma corda esticada, esta transporta a energia nas formas de energia cinética e energia potencial elástica.



Energia Cinética - considerando um elemento de massa **dm** da corda, quando ele passa por **y=0** (b) sua velocidade é máxima (só energia cinética) e quando passa pela posição **$y=y_m$** (a), sua energia cinética é nula.

Energia Potencial Elástica – Quando o elemento de massa oscila, seu comprimento varia para que possa assumir a forma da senoide. A energia potencial está associada a esta variação de comprimento.

Transporte de Energia -- Quando a onda se move para seções que estavam anteriormente em repouso, energia é transferida para estas novas seções.

A Taxa de Transmissão da Energia

A energia cinética ***dk*** associada a um elemento de massa ***dm*** é dada por

$$dK = \frac{1}{2} dm\, u^2$$

onde *u* é a velocidade transversal do elemento oscilante da corda derivamos a equação da posição do elemento.

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t)$$

Usando esta relação e fazendo ***dm=μdx***, reescrevemos,

$$dK = \frac{1}{2} dm\, u^2$$

$$dK = \frac{1}{2}(\mu dx)(-\omega y_m)^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Dividindo esta equação por dt, temos:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

A taxa média com que a energia cinética é transportada é

$$\left(\frac{dK}{dt}\right)_{méd} = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 y_m^2 [\cos^2(kx - \omega t)]_{méd}$$

Para um número inteiro de comprimentos de onda, $[\cos^2(kx - \omega t)]_{méd} = 1/2$

o que nos leva a,

$$\left(\frac{dK}{dt}\right)_{méd} = \frac{1}{4}\mu v\omega^2 y_m^2$$

A potência média, que é a taxa média com que a energia em ambas as formas é transmitida pela onda é,

$$P_{méd} = 2\left(\frac{dK}{dt}\right)_{méd} = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 y_m^2$$

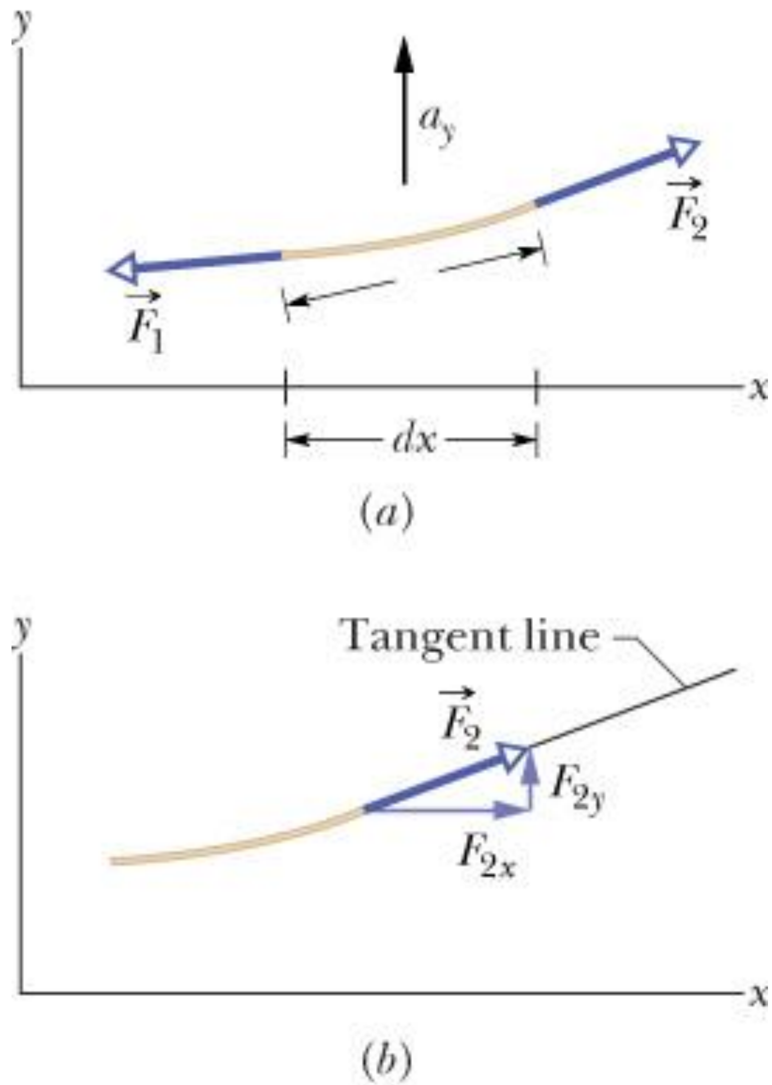
Exemplo 4:

Uma corda esticada possui densidade linear $\boldsymbol{\mu = 525 g/m}$ e está sujeita a uma tensão **45N**. Enviamos uma onda senoidal com freqüência **120Hz** e amplitude $\mathbf{y_m = 8{,}5mm}$ ao longo da corda. Com que taxa média a onda transporta energia? **R=100w**

16.8 A equação de Onda

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

Esta equação governa a propagação de ondas de todos os tipos

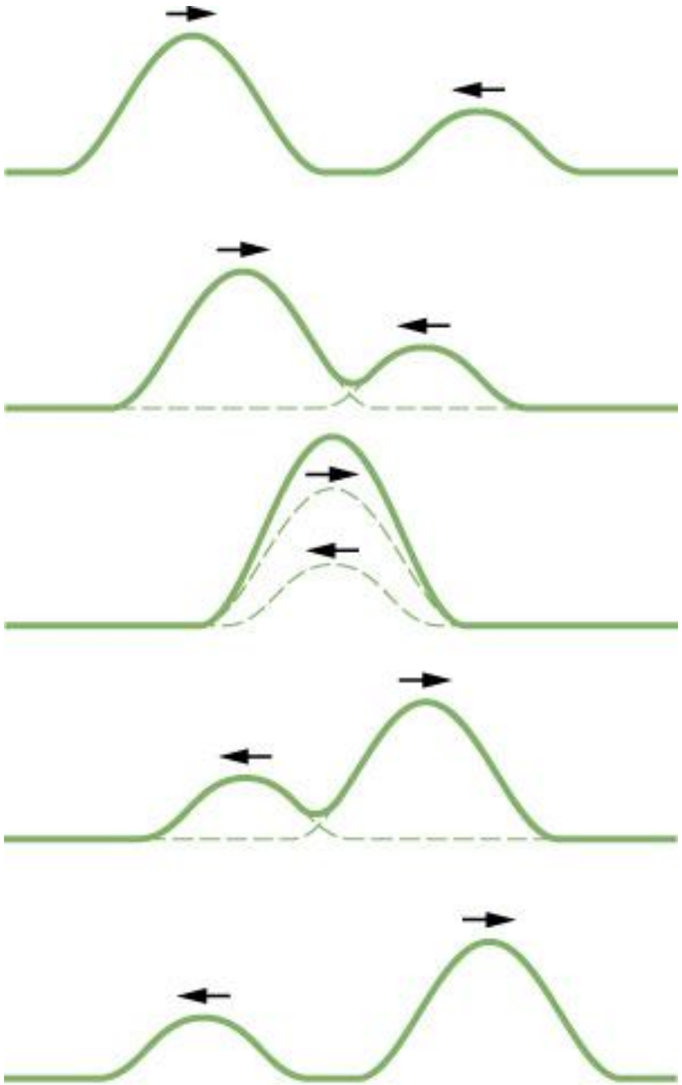


16.9 O Princípio da Superposição para Ondas

Suponha que duas ondas se propagam simultaneamente ao longo da mesma corda esticada.

Sejam $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ os deslocamentos que a corda sofreria se cada onda se propagasse sozinha. Na superposição,

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$



16.10 Interferência de Ondas

Se duas ondas senoidais de mesma amplitude e mesmo comprimento de onda se propagam no mesmo sentido ao longo de uma corda esticada, elas interferem para produzir uma onda resultante senoidal se propagando naquele sentido.

Sejam duas ondas propagando-se ao longo de uma corda esticada dado por:

$$y_1(x,t) = y_m sen(kx - \omega t) \quad \text{e} \quad y_2(x,t) = y_m sen(kx - \omega t + \phi)$$

Estas onda tem igual *w, f, k e* y_m, deslocando-se para o sentido positivo de *x*, com a mesma velocidade, diferindo apenas por um ângulo de fase Φ.

Somando as ondas temos:

$$y'(x,t) = y_m sen(kx - \omega t) + y_m sen(kx - \omega t + \phi)$$

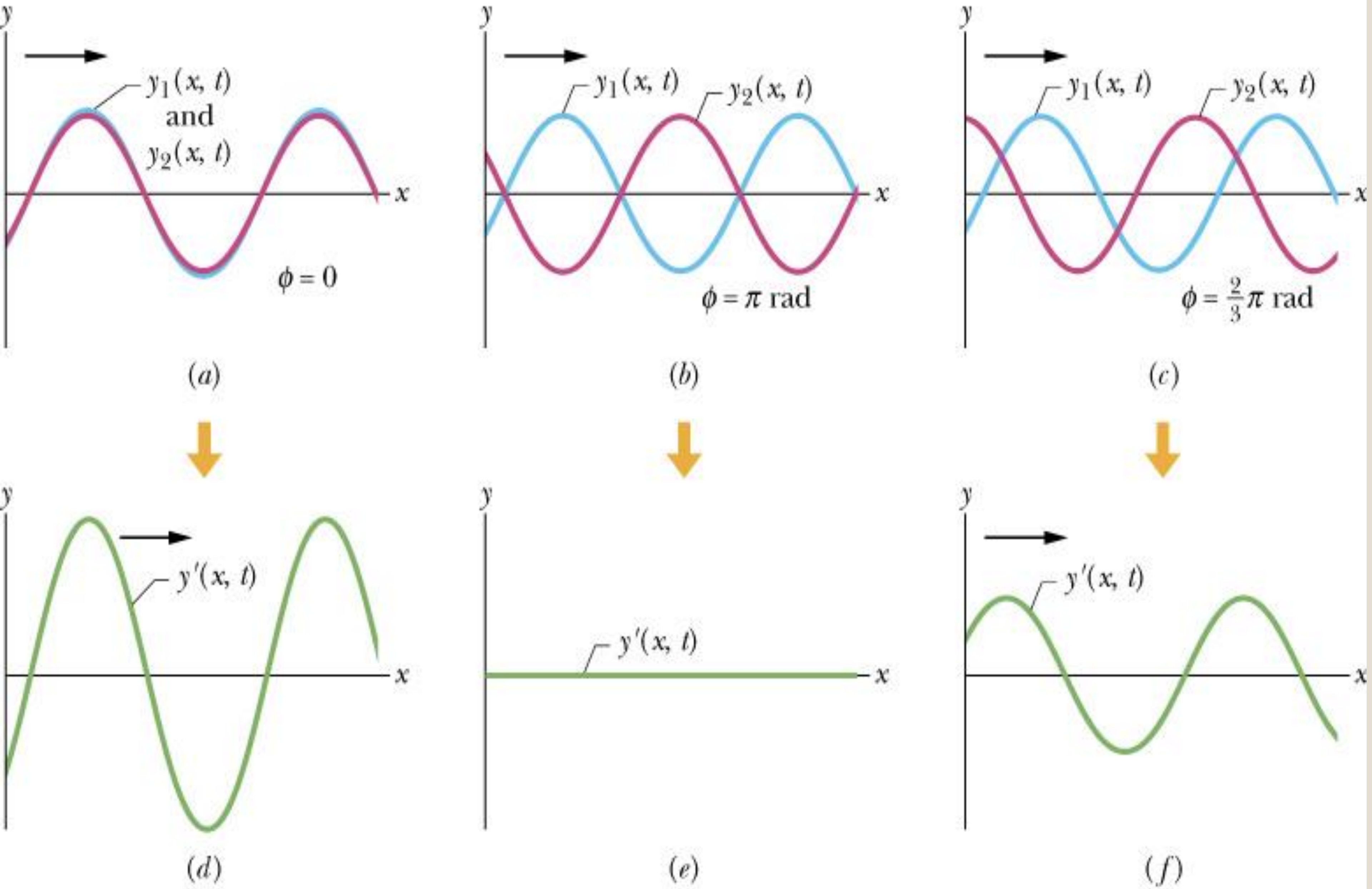
Matematicamente,

$$sen\alpha + sen\beta = 2sen\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

que aplicada a onda resultante tem-se:

$$\overbrace{y'(x,t)}^{Deslocamento} = \underbrace{[2y_m \cos\frac{1}{2}\phi]}_{termo\ \ de\ \ amplitude} \underbrace{sen(kx - \omega t + \phi)}_{Termo\ \ oscilatório}$$

A seguir alguns exemplos de interferência de duas ondas.



$y_1(x, t)$
and
$y_2(x, t)$
$\phi = 0$
$y_1(x, t)$
$y_2(x, t)$
$\phi = \pi$ rad
$y_1(x, t)$
$y_2(x, t)$
$\phi = \frac{2}{3}\pi$ rad
(a)
(b)
(c)
$y'(x, t)$
$y'(x, t)$
$y'(x, t)$
(d)
(e)
(f)

Exercício 5:

Duas ondas senoidais idênticas, se propagando no mesmo sentido ao longo de uma corda esticada, interferem uma na outra. A amplitude de cada onda é 9,8mm, e a diferença de fase Φ entre elas é 100^o. (a) Qual a amplitude y'_m da onda resultante? (b) Que diferença de fase, em radianos dará à onda resultante uma amplitude de 4,9mm?

16.11 Fasores.

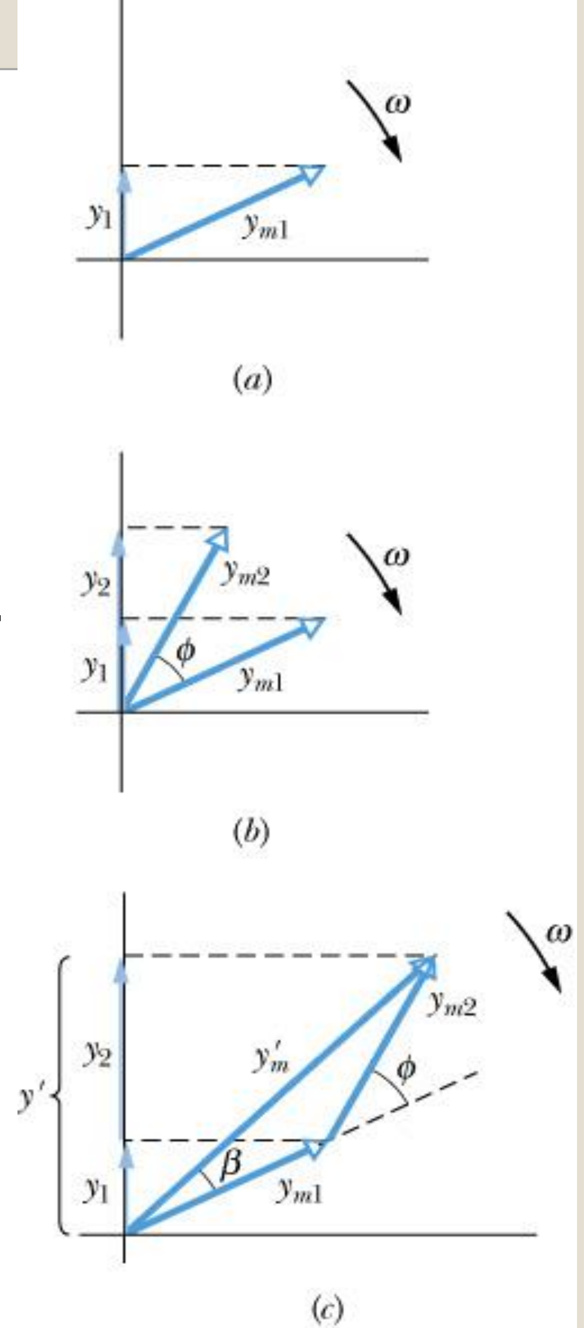
Podemos representar uma onda numa corda ou qualquer outro tipo de onda por um **fasor**, que nada mais é do que um vetor que tem um módulo igual a amplitude da onda e que gira em torno da origem com uma velocidade angular igual a freqüência angular da onda. Na figura (a) a projeção y_1 do fasor sobre o eixo vertical representa o deslocamento de um ponto pelo qual a onda passa. Um segundo fasor (b) de módulo y_{m2}, mesma velocidade angular *w*, gira com um ângulo constante Φ em relação ao primeiro. A onda resultante é representada pelo vetor soma y'_m dos dois fasores.

$$y_1(x,t) = y_{m1} sen(kx - \omega t)$$

$$y_2(x,t) = y_{m2} sen(kx - \omega t + \phi)$$

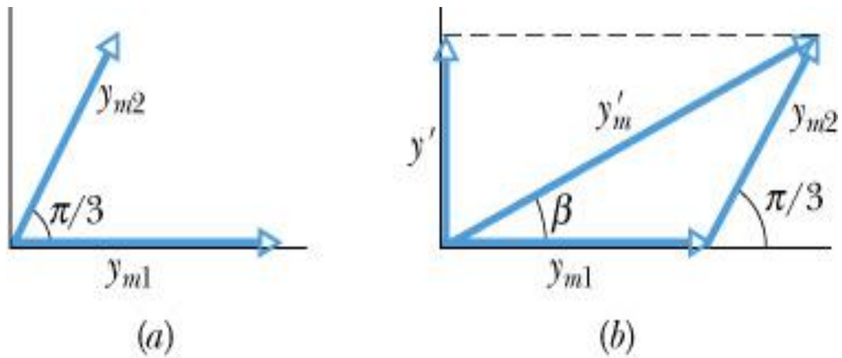
$$y'(x,t) = y'_m sen(kx - \omega t + \beta)$$

Podemos usar fasores para combinar ondas mesmo que suas amplitudes sejam diferentes.



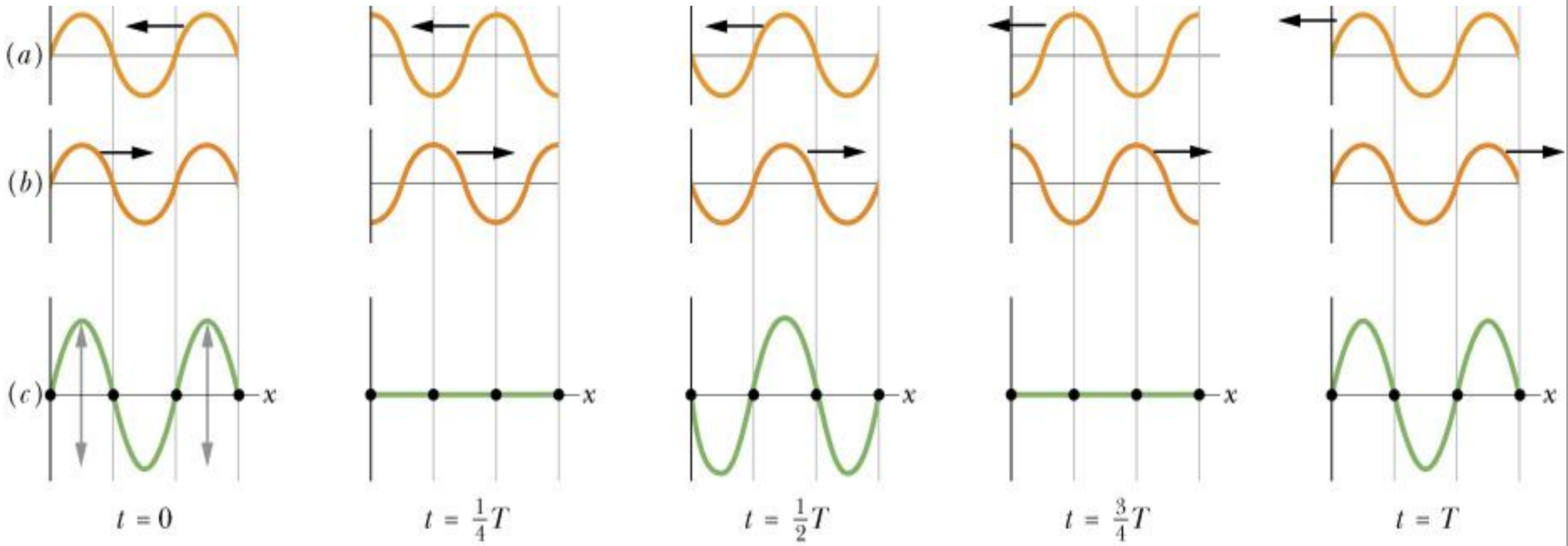
Exercício 6: Duas ondas senoidais $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ têm o mesmo comprimento de onda e se propagam juntas no mesmo sentido ao longo de uma corda. Suas amplitudes são ym1=4mm e ym2=3mm, e suas constantes de fase são 0 e π/3 rad, respectivamente. Quais são a amplitude y'_m e β a constante de fase da onda resultante? Escreva a onda resultante na forma da equação $y'(x,t) = y'_m sen(kx - \omega t + \beta)$

(6,1mm e 0,44rad)



16.12 Ondas Estacionárias

Se duas ondas senoidais de mesma amplitude e mesmo comprimento de onda se propagam em sentidos opostos ao longo de uma corda esticada, sua interferência mútua produz uma onda estacionária.



Uma característica marcante na onda resultante é que existem lugares ao longo da corda, chamados **nós**, onde a corda nunca se move. No ponto médio entre os nós estão os **antinós (ventres)**, onde a amplitude da onda resultante é máxima. Ondas com esta configuração são chamadas de **ondas estacionárias,** porque a forma da onda não se move para a direita ou para a esquerda.

Assim: $y_1(x,t) = y_m sen(kx - \omega t)$ $y_2(x,t) = y_m sen(kx + \omega t)$

$$y'(x,t) = y_m sen(kx - \omega t) + y_m sen(kx + \omega t)$$

Aplicando a relação trigonométrica

$$sen\alpha + sen\beta = 2sen\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

temos.

$$\overbrace{y'(x,t)}^{Deslocamento} = \underbrace{[2y_m \sin kx]}_{termo\ \ de\ amplitude} \underbrace{\cos(\omega t)}_{Termo\ \ oscilatório}$$

Na onda estacionária, a amplitude de oscilação de cada elemento da corda varia com a posição *x*.
A amplitude é nula para valores de *kx* que fornecem $sen kx = 0$ ou seja:

$kx = n\pi$ para $n = 0,1,2...$

A posição dos nós é obtida fazendo-se $k = 2\pi / \lambda$ e reordenando leva a:

$$x = n\frac{\lambda}{2}$$ para $n = 0,1,2...$ (nós)

A onda estacionária terá uma amplitude máxima quando $|sen kx = 1|$, ou seja:

$$kx = \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi$$

para $n = 0,1,2...$

$$kx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

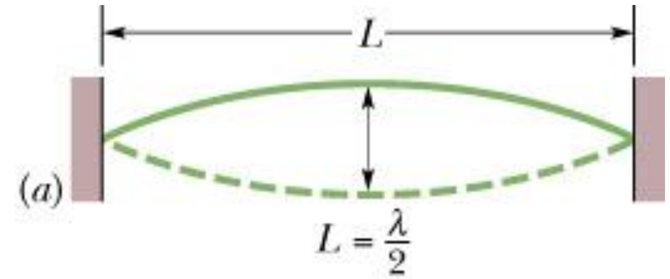
Substituindo $k = 2\pi / \lambda$ e reordenando tem-se $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$ para

$n = 0,1,2...$ (antinós)

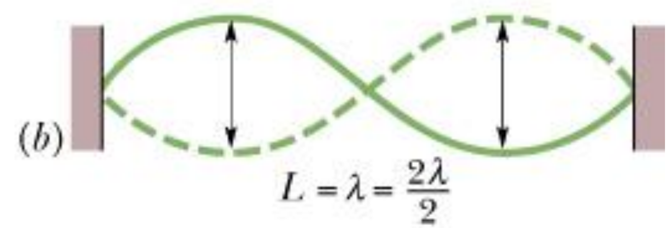
16.13 Ondas Estacionárias e Ressonância

Numa corda de violão, por exemplo, as ondas que se propagam para a direita na corda, se superpõe com as ondas que se propagam para a esquerda e o resultado é uma onda estacionária na corda.

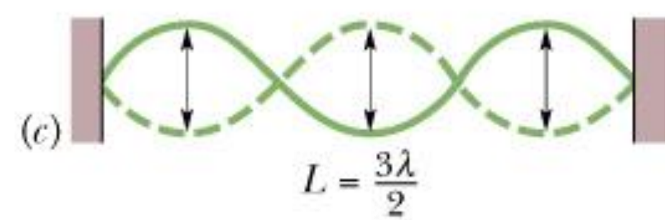
A ressonância pode produzir padrões de onda estacionária na corda que representam os harmônicos de vibração da corda.



Para o primeiro padrão (a) de vibração da corda (1º harmônico), o comprimento da corda equivale a meio comprimento de onda (um ventre).



O segundo padrão (b) de vibração (2º harmônico), tem exatamente um comprimento de onda (dois ventres).



O terceiro padrão (c) de vibração (3º harmônico), tem um comprimento de onda e meio (três ventres).

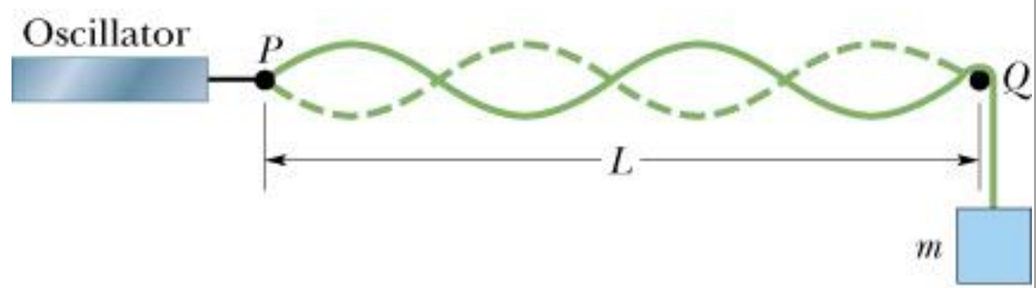
Assim, uma onda estacionária pode ser excitada em uma corda de comprimento L por uma onda com um comprimento de onda igual a um dos valores:

$$\boxed{\lambda = \frac{2L}{n}} \quad \text{para} \quad n = 1,2,3\ldots \quad \text{(número de harmônico)}$$

As freqüências de ressonância que correspondem a esses comprimentos de onda seguem de:

$$\boxed{f = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2L}} \quad \text{para} \quad n = 1,2,3\ldots$$

Exercício 7: Na figura, uma corda, ligada a um oscilador senoidal em P e deslizando sobre um suporte em Q, está esticada por um bloco de massa m. A separação L entre P e Q é 1,2m, a densidade linear da corda é 1,6 g/m, e a freqüência f do oscilador está fixada em 120Hz. A amplitude do movimento em P é suficientemente pequena para que este ponto seja considerado um nó. Também existe um nó em Q. (a) Que massa m permitiria ao oscilador excitar o quarto harmônico da corda? (b) Que modo de onda estacionária é excitado se m=1kg?



Exemplo 8: A fig. mostra a oscilação ressonante de uma corda de massa m=2,5g e comprimento L = 0,8m sob uma tensão 325N. Qual é o comprimento de onda das ondas transversais responsáveis pela onda estacionária mostrada na figura e qual é o número harmônico n? Qual é a frequencia f das ondas transversais e das oscilações dos elementos da corda?